

Equations Différentielles

$$y' = ay + b$$

← cte ← cte

$$\hookrightarrow y(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad \underline{\underline{C \in \mathbb{R}}}$$

exercice 1 :

$$y' = \sqrt{x} y \quad / \quad y' = ay$$

$$1) \quad y(x) = C e^{x\sqrt{x}} \quad / \quad y(x) = C e^{ax} \quad \underline{\underline{C \in \mathbb{R}}}$$

$$2) \quad y(x) = C e^{2\sqrt{x}}$$

$$y(2) = 3 \Leftrightarrow C e^{2\sqrt{2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow C = \underline{\underline{3e^{-2\sqrt{2}}}}$$

done the solution is:

$$\begin{aligned} y(x) &= \underline{3e^{-2\sqrt{2}}} \times e^{x\sqrt{2}} \\ &= 3e^{\sqrt{2}(x-2)} \end{aligned}$$

exercice 2 :

$$y' = -5y + 3$$

$$1) y(x) = C e^{-5x} - \frac{3}{-5}, \underline{\underline{C \in \mathbb{R}}}$$

$$y(x) = C e^{-5x} + \frac{3}{5}, \underline{\underline{C \in \mathbb{R}}}$$

$$2) y(0) = 2$$

$$y(0) = C e^{-5 \times 0} + \frac{3}{5}$$

$$= C + \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow C + \frac{3}{5} = 2$$

$$\Rightarrow C = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

donc la solution est :

$$y(x) = \frac{7}{5} e^{-5x} + \frac{3}{5}$$

exercice 3 :

$$2y' + 3y = -5$$

$$\Leftrightarrow 2y' = -3y - 5$$

$$\Leftrightarrow y' = \underbrace{-\frac{3}{2}}_a y \underbrace{- \frac{5}{2}}_b$$

Per solutions sont :

$$y(x) = C e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}}$$

$$= C e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{5}{3}, \quad \underline{\underline{C \in \mathbb{R}}}$$

Exercice 2

Mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ (a et b réels) et la résoudre.

1. $y' + 2y = 3$

2. $y' - 5 = y$

3. $3y' - 2y + 1 = 0$

4. $\sqrt{2}y' = 2y - 4$

$$y' = ay + b$$
$$\Rightarrow y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad \underline{\underline{C \in \mathbb{R}}}$$

Exercice 3

Déterminer la solution de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale proposée.

1. $y' = 2y; y(0) = 1$

2. $y' = 4y - 3; y(0) = -1$

3. $y' = -y + 1; y(2) = 6$

1) $y(x) = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$

$$y(0) = 1 \quad (\Rightarrow) \quad Ce^{2 \times 0} = 1$$

$$\Rightarrow C = 1$$

donc $y(x) = e^{2x}$.

$$2) y(x) = C e^{4x} + \frac{3}{4}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = -1 \Leftrightarrow C e^{4 \times 0} + \frac{3}{4} = -1$$

$$\Leftrightarrow C + \frac{3}{4} = -1$$

$$\Leftrightarrow C = -1 - \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow C = -\frac{7}{4}$$

done

$$y(x) = -\frac{7}{4} e^{4x} + \frac{3}{4}$$

3) $y(x) = C e^{-x} + 1, C \in \mathbb{R}$

$$y(2) = 6 \Leftrightarrow C e^{-2} + 1 = 6$$

$$\Leftrightarrow C e^{-2} = 5$$

$$\Leftrightarrow C = 5e^2$$

donc $y(x) = 5e^2 \times e^{-x} + 1$
 $= 5e^{2-x} + 1.$