

# Grand Gal

## Chef d'accusation 1 :

Loterie avec un ticket à 2€ et les gains :

|             |             |                                |
|-------------|-------------|--------------------------------|
| → jackpot   | 1 000 000 € | $\frac{1}{1\ 000\ 000}$        |
| → Lot moyen | 100 €       | $1/10\ 000$                    |
| → Lot petit | 2 €         | $1/1\ 000$                     |
| → perdre    | 0 €         | $\frac{998\ 298}{1\ 000\ 000}$ |

La Loterie affiche "1 chance sur 1 000 000 de gagner!".

•  $X$  : gain d'un joueur

$$E[X] = 1\,000\,000 \times \frac{1}{1\,000\,000}$$

$$+ 100 \times \frac{1}{10\,000}$$

$$+ 2 \times \frac{1}{1\,000} + 0 - 2$$

(prix ticket)

$$= 1 + 0,01 + 0,002$$

$$= 1,012 - 2$$

$$= -0,988 \text{ €}$$

En moyenne le joueur va perdre 1 € par ticket.

• La Bterie dit 1 chance sur 100 de gagner, mais gagner quoi exactement?

$G$ : "gagner un lot"

$$L, \mathbb{P}(G) = \frac{1 \text{ lot}}{100 \text{ ou}} \approx \frac{1}{100} \text{ d'éc } \frac{1}{100}$$

maintenant sachant que l'on a gagné, quelle est la probabilité d'avoir décroché le jackpot?

$$\mathbb{P}_G(J) = \frac{\mathbb{P}(J \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(J)}{\mathbb{P}(G)}$$

$$\approx 0,09$$

alors que la probabilité de  
gagner un petit pot est :

$$P_G(P) = \frac{P(G \cap P)}{P(G)} = \frac{P(P)}{P(G)} \\ = 0,91$$

donc on a 91% de chance  
d'avoir un petit pot contre 9%  
de chance d'avoir le jackpot.

## . Chef d'accusation 2 :

La roulette européenne comporte 37 cases : Les numéros 1 à 36 rouge ou noir et un seul zéro vert.

Le joueur mise 10 € sur le rouge.

rouge (18 cases) + 10 €  $18/37$

noir ou zéro (19 cases) - 10 €  $19/37$

Le casino met en avant la promo suivante : "vous avez 1 chance sur 2 de gagner!".

C'est vrai mais c'est aussi  
trampes.

•  $X$  : gain du joueur

$$E[X] = +10 \times \frac{18}{37} + (-10) \times \frac{19}{37}$$

$$= -\frac{10}{37} = -0,27$$

donc pour chaque mise de  
10 €, le joueur perd en moyenne  
0,27 €. Donc cela représente  
un avantage casino de 2,7%.

• Si l'espérance suffit à condamner la roulette, pourquoi des millions de joueurs continuent d'y jouer ?

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2.$$

$$= 10^2 \times \frac{18}{37} + (-10)^2 \times \frac{19}{37} - \left(-\frac{10}{37}\right)^2$$

$$= 100 - \frac{100}{1369}$$

$$\approx 99,93$$

$$\text{et } \sigma(X) = \sqrt{99,93} \approx 10$$

L'écart-type est de 10€,  
la mise du joueur ! Cela veut  
dire que les résultats sont



extrêmement dispersés autour de la moyenne qui est partant négative.

Sur une seule soirée, un joueur peut très bien gagner 50, 100 voir 200 €.

C'est cette dispersion que le cerveau retient et qui alimente l'illusion de contrôle.

De plus, le casino joue sur des millions de parties et par la loi des grands nombres ses gains convergent vers l'espérance de façon quasi certaine.



### Chef d'accusation 3.

Un institut de sondage interroge  $n = 1000$  personnes sur leur soutien à un candidat.

700 répondent oui, et les médias affichent : 70 % des Français soutiennent ce candidat.

on note  $X$  la v.a qui compte le nombre de personnes favorables dans l'échantillon. On suppose que chaque personne répond indépendamment avec une proba  $p$  de soutenir le candidat.

La fréquence observée est 
$$\hat{p} = \frac{700}{1000} = 0,70.$$

peut-on vraiment affirmer que  $p = 70\%$  dans toute la population?

$$\bullet X \hookrightarrow \mathcal{B}(p, 1000)$$

$$\text{on pose } F = \frac{X}{1000}$$

$$E[F] = p \quad \text{et} \quad V(F) = \frac{p(1-p)}{1000}$$

d'après Bienaymé - Tchebychev

$$P(|F - p| > k) \leq \frac{V(F)}{k^2}.$$

on cherche  $k$  tel que cette proba soit inférieure à 5%.

$$\frac{V(F)}{k^2} \leq 0,05$$

$$k^2 > \frac{V(F)}{0,05} = \frac{0,7(1-0,7)}{1000 \times 0,05}$$

on prend la variance observée

$$= 0,002$$

donc  $k > \sqrt{0,002} \approx 0,045$

donc avec une proba. de 95% la vraie valeur de  $\theta$  se situe dans :

$$[0,7 - 0,045 ; 0,7 + 0,045]$$

$$= [63,5\% ; 76,5\%]$$

donc on a un écart de  $\pm 6,5$  point par rapport à

ce qui a été annoncé par les médias.

• Supposons maintenant que l'échantillon soit biaisé : au lieu de 1000 personnes représentatives, le sondage interroge majoritairement les 18-35 ans urbains, <sup>30% de la pop.</sup> qui soutiennent le candidat à 85% contre 55% pour le reste de la population.

Par la formule des probas totales, la vraie proportion dans la population est :

$$p = P(\text{soutien} \mid \text{jeune urbain}) \times P(\text{jeune urbain}) + P(\text{soutien} \mid \text{reste}) \times P(\text{reste})$$

$$= 0,85 \times 0,30 + 0,55 \times 0,70$$

$$= 0,64$$

donc l'échantillon tiré  
affiche 70%, alors qu'en  
réalité on est à 64%.

Ce qui revient à 6 point  
d'écart encore une fois,