TD 9

exercice 2 :

(iv)

$$\mathbb{D}(\bar{\boldsymbol{w}}) = \mathbb{I} - \left(\lambda\mathbb{I} + \left(\frac{\partial f}{\partial w}(\bar{\boldsymbol{w}})\right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial f}{\partial w}(\bar{\boldsymbol{w}})\right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial w}(\bar{\boldsymbol{w}})\right)^{\mathrm{T}} \mathbb{A}(\bar{\boldsymbol{w}}).$$

$$A(\bar{\omega}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial w}\left((1-t)\bar{\omega} + t\bar{\omega}\right) dt$$

or $(1-t)\bar{\omega} + t\bar{\omega} = \bar{\omega}$

$$A(\bar{\omega}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial w}(\bar{\omega})\, dt$$

$$= \frac{\partial f}{\partial w}(\bar{\omega}) \times 1$$

$$\mathbb{D}(\bar{\boldsymbol{w}}) = \mathbb{I} - \left(\lambda\mathbb{I} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{w}}(\bar{\boldsymbol{w}})\right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{w}}(\bar{\boldsymbol{w}})\right)^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{w}}(\bar{\boldsymbol{w}})\right)^{\mathrm{T}} \mathbb{A}(\bar{\boldsymbol{w}}).$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(\bar{w})$$

$$= I - (\lambda I + J^T J)^{-1} \underbrace{J^T J}_{J^T J + \lambda I - \lambda I}$$

$$= I - (\lambda I + J^T J)^{-1} \left[(\lambda I + J^T J) - \lambda I \right]$$

$$= I - \underbrace{(\lambda I + J^T J)^{-1} (\lambda I + J^T J)}_{I} + \lambda I (\lambda I + J^T J)^{-1}$$

$$= \underbrace{\lambda I \underbrace{(\lambda I + J^T J)}_{\text{SDP}}{}^{-1}}_{\text{SDP.}}$$

on pose $M = \lambda I + J^T J$

on prend $\underbrace{\mu > 0}_{}$ de M

↳ M est déf. positive

et $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre.

$$\langle Mv, v\rangle = \langle \mu v, v\rangle$$

$$\langle Mv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle + \langle\langle J^T J, v\rangle, v\rangle$$

$$\boxed{\langle N^T u, v\rangle = \langle u, (Nv)\rangle}$$

$$= \lambda \langle v, v\rangle + \langle\langle J, Jv\rangle, v\rangle$$

$$= \lambda \langle v, v\rangle + \underbrace{\langle Jv, Jv\rangle}_{>0}$$

$$> \langle v, v\rangle$$

donc :

$$\underbrace{\langle \mu v, v \rangle}_{\mu \langle v, v \rangle} > \langle v, v \rangle$$

d'où $\boxed{\mu > 1}$

or $D(\bar{\omega}) = \lambda \mu^{-1}$

donc les valeurs propres de D sont strictements inférieurs à 1.

donc $\rho(D(\bar{\omega})) < 1$.

(v) $\|D(\bar{\omega})\|_2 < 1$

il existe $\beta < 1$ tel que :

$$\|D(\omega)\|_2 \leq \beta$$

$\forall x \in B(\bar{\omega}, \alpha)$, pour $\alpha > 0$

Si $\omega^{(k)} \in B(\bar{\omega}, \alpha)$,

$$\|\omega^{(k+1)} - \bar{\omega}\|_2$$

$$= \|D(\omega^{(k)}) - (\omega^{(k)} - \bar{\omega})\|_2$$

$$\leq \|D(\omega^{(k)})\|_2 \, \|\omega^{(k)} - \bar{\omega}\|_2$$

$$\leq \beta \, \|\omega^{(k)} - \bar{\omega}\|_2$$

$< \beta \times \alpha \quad < \alpha$

$\beta < 1$

donc $\omega^{(k+1)} \in B(\bar{\omega}, \alpha)$

donc par récurrence si on a $\omega^{(0)} \in B(\bar{\omega}, \alpha)$, alors $\omega^{(k)} \in B(\bar{\omega}, \alpha) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

- $\| \omega^{(k+1)} - \bar{\omega} \|_2 \leq \beta \| \omega^{(k)} - \bar{\omega} \|_2$

d'où par récurrence :

$$\| \omega^{(k)} - \bar{\omega} \|_2 \leq \beta^k \overbrace{\| \omega^{(0)} - \bar{\omega} \|_2}^{\text{cte} > 0}$$

or $\beta < 1 \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \beta^k = 0$

$$\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

donc $\lim_{k \to +\infty} w^{(k)} = \overline{w}$