

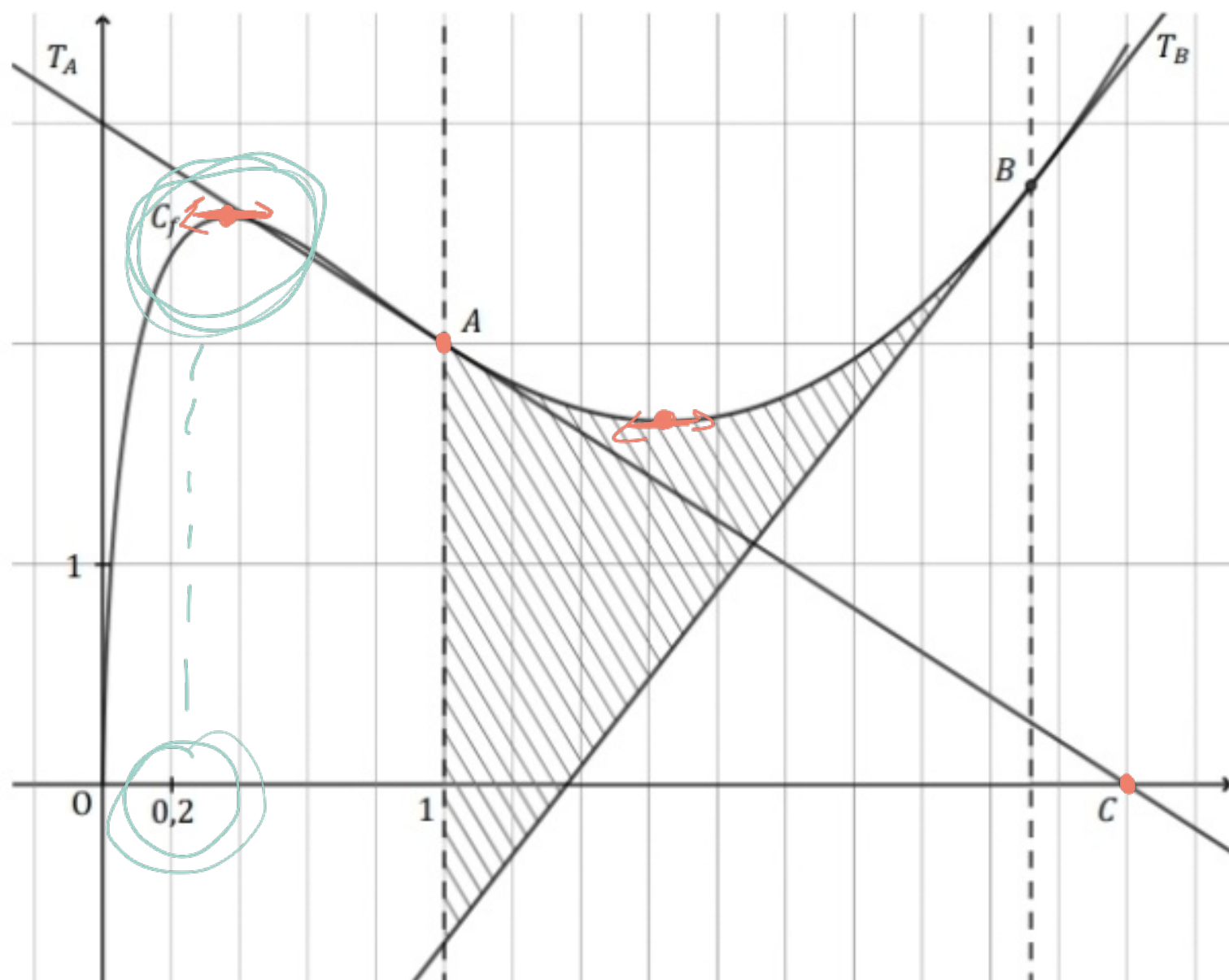
Exercice 2 (6 points)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f , notée C_f , sur l'intervalle $]0; 3]$;
- la droite T_A , tangente à C_f au point $A(1; 2)$;
- la droite T_B , tangente à C_f au point $B(e; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3; 0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

$$f'(1) = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{2-0}{1-3} = -1$$

2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3]$? $\rightarrow 2$

3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

f semble concave
autour de 0,2
donc $f''(0,2) < 0$

Partie B : Etude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \left(2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 \right)$$

on posant $X = \ln(x)$, $2X^2 - 3X + 2 = 0$
impossible

$\neq 0$ $X = \ln(x) \in \mathbb{R} \neq 0$

donc $\forall x \in]0; +\infty[$
 $f(x) \neq 0$ et donc
C_f ne coupe pas...

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$

En déduire que C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

$$f(x) \neq 0$$

2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.

On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln(x)^2} = 0$

$$\frac{f(x)}{x \ln(x)^2} = \frac{2 - 3 \frac{\ln(x)}{\ln(x)^2} + 2}{1 + \frac{2}{\ln(x)^2}}$$

$\lim = 2$

3. On admet que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = 2(\ln(x))^2 + \ln(x) - 1$$

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{1}{x} (4\ln(x) + 1)$$

$$f''(x) = 2 \times 2 \times \ln(x) \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$= 4\ln(x) \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (4\ln(x) + 1)$$

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$

et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

c. Montrer que la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

$T_B \rightarrow$ abscisse e

sur $[1; +\infty[\subset [e^{-1/2}; +\infty[$, f est convexe, donc C_f est au-dessus de la tangente T_B .

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite

$$y = 2x - e \quad \left| \quad \begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) & f'(e) &= 2 \\ &= f'(e)(x-e) + f(e) & f(e) &= e \\ &= 2(x-e) + e = 2x - e \end{aligned} \right.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^e x \ln(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4} \quad \begin{aligned} \int_1^e x \ln(x) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \left[\frac{1}{2} x \right]_1^e \\ &= \dots = \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

$\int u'v = [u \times v] - \int u \times v'$

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f , la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

On admet que $\int_1^e x (\ln(x))^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4}$.

En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \mathcal{A} &= \int_1^e f(x) - (2x - e) dx \\ &= \int_1^e x (2 \ln(x))^2 - 3x + e dx \\ &= \dots = \underline{\underline{\frac{3e^2 - 4e - 5}{4}}} \text{ u.a} \end{aligned}$$