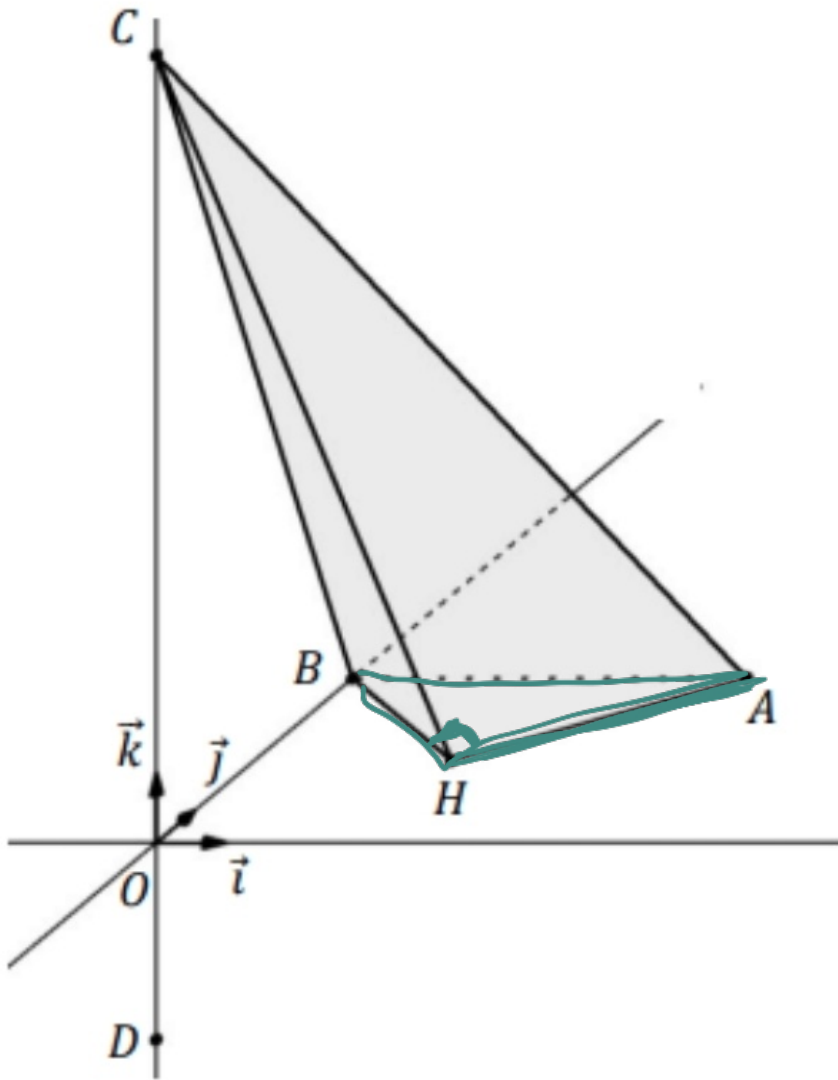


Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(5; 5; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(0; 0; 10)$ et $D\left(0; 0; -\frac{5}{2}\right)$.



1. a. Montrer que $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD) .

b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

$$x - y = 0$$

2. On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \times 1 \\ y = 5 - \frac{5}{2} \times 1 \\ z = 0 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{5}{2}t - (5 - \frac{5}{2}t) = 0$$

$$\frac{5}{2}t - 5 + \frac{5}{2}t = 0$$

$$5t - 5 = 0 \Leftrightarrow 5t = 5 \Leftrightarrow t = 1$$

a. On admet que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H . Justifier que les coordonnées de H sont

$$\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right).$$

$$H \in (CAD) \checkmark$$

b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

$$(\overrightarrow{BH}) \perp (CAD) \checkmark$$

3. a. Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H .

$$\text{L, } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = -\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} + -\frac{5}{2} \times -\frac{5}{2} + 0 \times 0 = 0$$

b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -5/2 \\ -5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{BH}$ normal au plan

4. a. Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C .

b. En déduire le volume du tétraèdre $ABCH$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B . Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC) .

$$\text{Aire}(ABH) = \frac{AH \times BH}{2} = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \frac{25}{4}$$

$$AH = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = 6,25 \text{ u.a.}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$BH = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$