

exercice 1:

1) $g(x) = \underbrace{ax}_{u} e^{\sqrt{-\frac{1}{4}x}}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= a e^{-\frac{1}{4}x} + ax \cdot -\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} \\ &= a e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4} ax e^{-\frac{1}{4}x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) + \frac{1}{4} g(x) &= a e^{-\frac{1}{4}x} - \cancel{\frac{1}{4} ax e^{-\frac{1}{4}x}} + \cancel{\frac{1}{4} ax e^{-\frac{1}{4}x}} \\ &= a e^{-\frac{1}{4}x} \end{aligned}$$

or g est une solution particulière de (E) si :

$$g'(x) + \frac{1}{4} g(x) = 20 e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$\Leftrightarrow a e^{-\frac{1}{4}x} = 20 e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$\Leftrightarrow a = 20$$

$$2) y(x) = k e^{-\frac{1}{4}x}, \quad \underline{\underline{k \in \mathbb{R}}}$$

4) Les solutions sont

$$\underbrace{y(x)}_{f(x)} = k e^{-\frac{1}{4}x} + 20x e^{-\frac{1}{4}x}, \quad \underline{\underline{k \in \mathbb{R}}}$$

$$\begin{aligned} 5) f(0) &= k e^{-\frac{1}{4} \times 0} + 20 \times 0 \times e^{-\frac{1}{4} \times 0} \\ &= k \end{aligned}$$

$$f(0) = 8 \quad (\Rightarrow) \quad k = 8$$

donc la solution est

$$f(x) = 8e^{-\frac{1}{4}x} + 20xe^{-\frac{1}{4}x}$$

exercice 2:

1) $I_n = \int_1^e h(x)^n dx$

$$I_{n+1} = \int_1^e \underbrace{1}_{\substack{\text{red } 1 \\ \text{green } u'}} \times \underbrace{h(x)^{n+1}}_{\text{green } v} dx$$
$$= \left[x h(x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \cancel{x} \times (n+1) \times \cancel{\frac{1}{x}} \times h(x)^n dx$$

Annotations:
- A purple bracket connects the $h(x)^{n+1}$ term in the first integral to the $h(x)^n$ term in the second integral.
- Purple arrows point from u^{n+1} and u^n to the $h(x)^{n+1}$ and $h(x)^n$ terms respectively.
- A purple arrow points from u' to the $1/x$ term in the second integral.

$$= \left(e \times \underbrace{h(e)}_{=1} - \cancel{1 \times h(1)^{n+1}}_{=0} \right) - \int_1^e (n+1) h(x)^n dx$$

$$\begin{aligned}
 &= e - (n+1) \int_1^e (h(x))^n dx \\
 &= e - (n+1) I_n.
 \end{aligned}$$

donc l'affirmation est vraie

3) coeff. directeur $\Rightarrow f'(1)$.

$$\bullet f(x) = k e^{\frac{3}{2}x} - \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow k e^0 - \frac{4}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$$

donc $f(x) = \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$

$$f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}x}$$
$$= 2 e^{\frac{3}{2}x}$$

$$\Rightarrow f'(1) = 2 e^{\frac{3}{2} \times 1} = 2 e^{\frac{3}{2}}$$

donc l'affirmation est vraie.

4) $f(x) = x + \sin(x)$

$$f'(x) = 1 + \cos(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x).$$

or $\sin$ change de signe
en π , et comme elle est
 2π -périodique, alors sur
 $\mathbb{R}$, elle va changer de
signe une infinité de fois.

donc f admet une infinité
de points d'inflexion.

exercice 3:

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

1) $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

$$= \left[\ln(1+x) \right]_0^1$$

$$= \ln(1+1) - \ln(0+1)$$

$$= \ln(2) - \ln(1)$$

$$= \ln(2)$$

$$2) a) u_{n+1} - u_n$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n}{\cancel{1+x}} \times (\cancel{x+1}) dx$$

$$= \int_0^1 x^n dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$b) \quad u_1 - u_0 = \frac{1}{1} = 1$$

$$u_1 - h(1) = 1$$

$$\text{donc} \quad u_1 = 1 + h(1)$$

$$3) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

donc (u_n) est croissante.