

Variables aléatoires

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,15	0,4	0,05

1. Déterminer : **a.** $P(X = 1)$ **b.** $P(X \leq 4)$
c. $P(X < 4)$ **d.** $P(X > 2)$
2. Déterminer l'espérance $E(X)$

1). $P(X = 1) = 0,1$

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= P(X = 1) \\ &+ P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \end{aligned}$$

$$= 0,1 + 0,3 + 0,15 + 0,4 = 0,95$$

$$P(X < 4) = 0,1 + 0,3 + 0,15 = 0,55$$

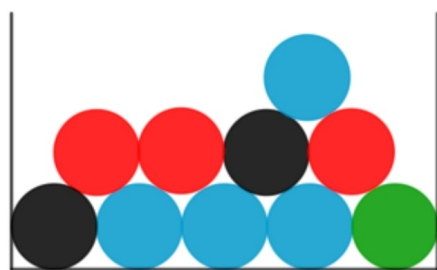
$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 0,15 + 0,4 + 0,05 \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) E[X] &= 1 \times P(X=1) \\ &\quad + 2 \times P(X=2) \\ &\quad + 3 \times P(X=3) \\ &\quad + 4 \times P(X=4) \\ &\quad + 5 \times P(X=5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \times 0,1 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,15 \\ &\quad + 4 \times 0,4 + 5 \times 0,05 \end{aligned}$$

$$= 1,55$$

On tire une boule dans l'urne ci-dessous:



Si la boule tirée est bleue, on gagne 5 points. Si elle est rouge, on gagne 2 point sinon on perd 4 points. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

- a. Déterminer la loi de probabilité de X
b. Déterminer l'espérance de X et interpréter.

a) $X(\Omega) = \{5; 2; -4\}$

$$P(X=5) = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$P(X=2) = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$P(X=-4) = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$= 1$$

x_i	5	2	-4
$P(X=x_i)$	0,4	0,3	0,3

b) $E[X] = 5 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + (-4) \times 0,3 = 1,4$

En moyenne on obtient
1,4 points.

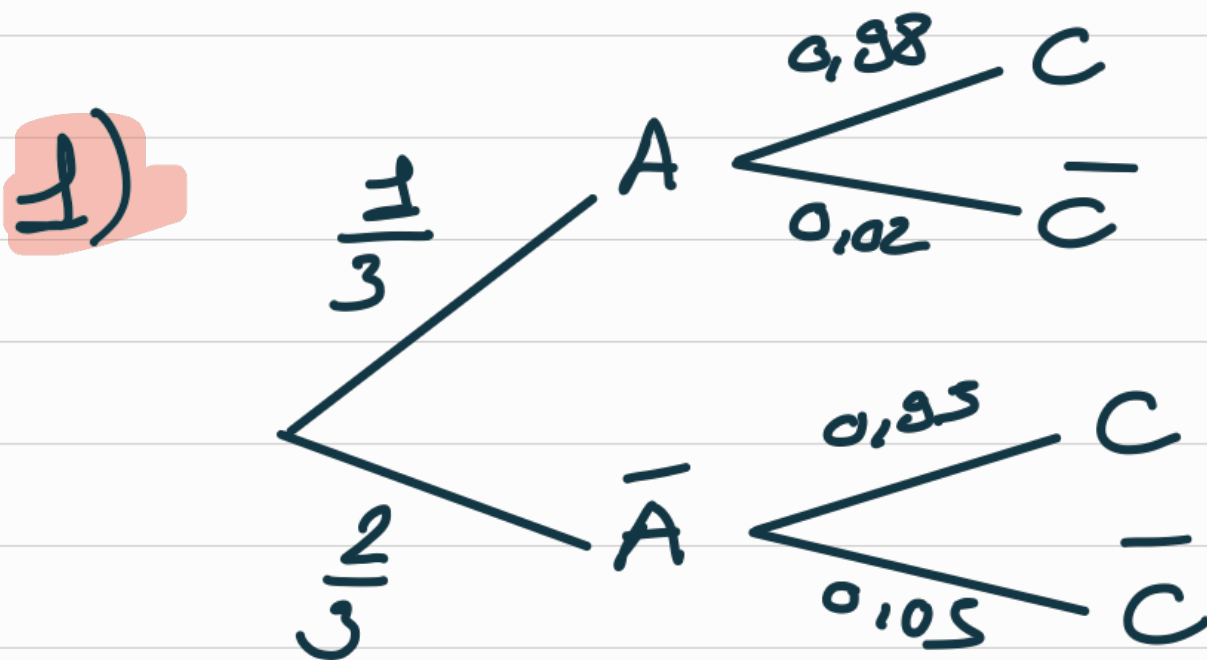
Une entreprise fabrique des tablettes de chocolats. Il y a deux chaînes de fabrication, la chaîne A et la chaîne B. À l'issue de la fabrication, certaines tablettes ont des défauts et ne sont pas commercialisables.

- La chaîne A est lente mais fiable. La probabilité qu'une tablette de chocolat sur cette chaîne soit commercialisable est 0,98.
- La chaîne B est plus rapide mais moins fiable. La probabilité qu'une tablette de chocolat sur cette chaîne soit commercialisable est 0,95.

La chaîne A fabrique le tiers de la production totale. À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :

- A l'évènement « la tablette de chocolat provient de la chaîne de A »
- C l'évènement « la tablette de chocolat est commercialisable ».

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la tablette vienne de la chaîne A et soit commercialisable.
3. Déterminer la probabilité que la tablette soit commercialisable.
4. La chocolaterie gagne 0,10 euro par tablette commercialisable et perd 0,30 euro par tablette non commercialisable. Soit X la variable aléatoire égale au gain de la chocolaterie par tablette produite.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X.
 - b. Calculer l'espérance. Interpréter.



2)

$$\begin{aligned} P(A \cap C) &= P(A) \times P_A(C) \\ &= \frac{1}{3} \times 0,98 \\ &= 0,33 \end{aligned}$$

3) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P(\bar{A} \cap C) \\ &= P(A) \times P_A(C) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(C) \\ &= \frac{1}{3} \times 0,98 + \frac{2}{3} \times 0,95 \\ &= 0,96 \end{aligned}$$

4) b) $E[X] = 0,10 \times 0,96 - 0,30 \times 0,04$

$$= 0,086$$

En moyenne, par tablette d'entreprise gagne 0,086 euros.

Exercice 1 :

Un concessionnaire vend entre 0 et 4 voitures d'un certain modèle en une semaine.

Soit X la variable aléatoire qui, pour une semaine, donne le nombre de voitures vendues. X suit la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2	3	4
$p(X=k)$	0,26	0,23	a	0,15	0,05

1. Calculer la valeur de a .

2. a) Calculer $p(X > 2)$.

b) Calculer $p(X \leq 3)$.

3. Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat.

4. Calculer la variance et l'écart-type de cette variable aléatoire.

$$1) P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$$

$$\Rightarrow 0,26 + 0,23 + a + 0,15 + 0,05 = 1$$

$$\Rightarrow a + 0,69 = 1$$

$$\Rightarrow a = 1 - 0,69$$

$$\Rightarrow a = 0,31$$

$$4) V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 0^2 \times 0,26 + 1^2 \times 0,23 \\ &\quad + 2^2 \times 0,31 + 3^2 \times 0,15 \\ &\quad + 4^2 \times 0,05 \\ &= 3,62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= 3,62 - (1,5)^2 \\ &= 1,37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ &= \sqrt{1,37} \approx 1,17 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Dans une maternité, on estime qu'à la naissance, la probabilité qu'un enfant soit une fille est égale à 0,51. On choisit de manière indépendante trois enfants nés dans cette maternité. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de filles parmi ces trois enfants.

1. Représenter l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité qu'exactement deux enfants soient des filles.
3. Décrire l'événement $X = 0$ et calculer sa probabilité.
4. Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X .

x	0	1	2	3
$p(X=x)$	0,12	0,37	0,38	0,13

5. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire et interpréter. $\rightarrow 1,52$
6. Calculer la variance et l'écart-type de cette variable aléatoire.

