

Intégrations

Exercice 2 Déterminer la valeur moyenne de :

1. la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[4 ; 25]$.

2. la fonction $x \mapsto 10e^x(e^x - 8)^4$ sur $[0 ; \ln(8)]$.

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[4 ; 25]$

$$\int_4^{25} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_4^{25}$$

$$= 2\sqrt{25} - 2\sqrt{4}$$

$$= 2 \times 5 - 2 \times 2$$

$$= 10 - 4$$

$$= 6$$

$$\text{done } m = \frac{1}{25-4} \times 6$$

$$= \frac{6}{21}$$

$$= \frac{2}{7}$$

2) $f(x) = 10e^x (e^x - 8)^4$
sur $[0; \ln(8)]$.

$$\int_0^{\ln(8)} 10e^x (e^x - 8)^4 dx$$

$u' = e^x$

$u' u^4$

$$= \left[10 \times \frac{(e^x - 8)^5}{5} \right]_0^{\ln(8)}$$

$$= 2 \times (e^{\ln(8)} - 8)^5 - 2 \times (e^0 - 8)^5$$

$$= 2(8 - 8)^5 - 2 \times (1 - 8)^5$$

$$= 2 \times 0 - 2 \times (-7)^5 = -33614$$

$$m = \frac{f}{h(\delta) - 0} \times \int_0^{h(\delta)} 10e^x (e^x - \delta)^4 dx$$

$$= \frac{-336K}{h(\delta)}.$$

Exercice 4 La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0 ; +\infty[$ par $p(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}$ où le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1^{er} janvier 2000.

Déterminer la proportion moyenne d'individus équipés entre le 1^{er} janvier 2008 et le 1^{er} janvier 2010.

$$m = \frac{1}{10 - 8} \times \int_8^{10} p(x) dx$$

$$\int_8^{10} p(x) dx = \int_8^{10} \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}} dx$$

$$\frac{u'}{u} \rightarrow \ln(u) = \left[\frac{1}{0,2} \ln(1 + e^{0,2x}) \right]_8^{10}$$

$$= \frac{1}{0,2} \ln(1 + e^{0,2 \times 10}) - \frac{1}{0,2} \ln(1 + e^{0,2 \times 8})$$

$$= \frac{1}{0,2} \ln(1 + e^2) - \frac{1}{0,2} \ln(1 + e^{\frac{8}{5}})$$

$$m = \frac{1}{2} \times 1,7$$

$$\approx 0,85$$

Exercice 1 (Pondichéry, avril 2014) Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x} + 2x + 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

1. a) Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x + 2$.

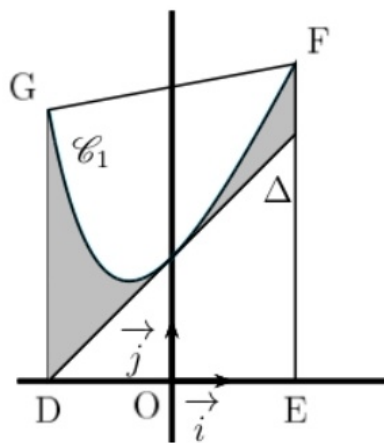
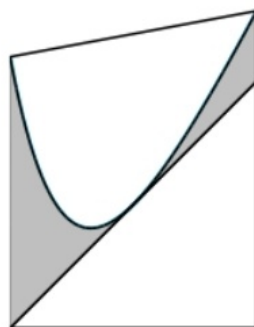
La figure ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite Δ .

Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.

Le contour du logo est représenté par le trapèze

DEFG où :

- D est le point de coordonnées $(-2 ; 0)$;
- E est le point de coordonnées $(2 ; 0)$;
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}_1$;
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathcal{C}_2$.



La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ , la courbe $\mathcal{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

$$\begin{aligned}
 1) \quad a) \quad g(x) &= e^{-x} + 2x + 1 - (x + 2) \\
 &= e^{-x} + 2x + 1 - x - 2 \\
 &= e^{-x} + x - 1
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = -e^{-x} + 1$$

$$\begin{aligned}g'(0) &= -e^{-0} + 1 \\&= -1 + 1 \\&= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g''(x) &= -(-e^{-x}) \\&= e^{-x} > 0\end{aligned}$$

$$g''(0) = e^{-0} = 1 > 0$$

donc 0 est un minimum
de g sur $\mathbb{R}$

b) on a : $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

donc $g(x) > x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

donc $\mathcal{E}_g$ est au-dessus
de P_a droite $\Delta : y = x + 2$.

$$2) \mathcal{A} = \int_{-2}^2 g(x) - (x+2) dx$$

$$= \int_{-2}^2 g(x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 e^{-x} + x - 2 dx$$

$$= \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x \right]_{-2}^2$$

$$= \left(-e^{-2} + \frac{2^2}{2} - 2 \right) -$$

$$\left(-e^{-(-2)} + \frac{(-2)^2}{2} - (-2) \right)$$

$$= \left(-e^{-2} + 2 - 2 \right) - \left(-e^2 + 2 + 2 \right)$$

$$= -e^{-2} + 0 + e^2 - 4$$

$$= e^2 - e^{-2} - 4$$

$$\approx 3,25 \text{ u.a.}$$

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2 + 1}$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \int_n^{2n} f(x) dx$.

1. Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $0 \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$.
3. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

1) on pose $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

$$g'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

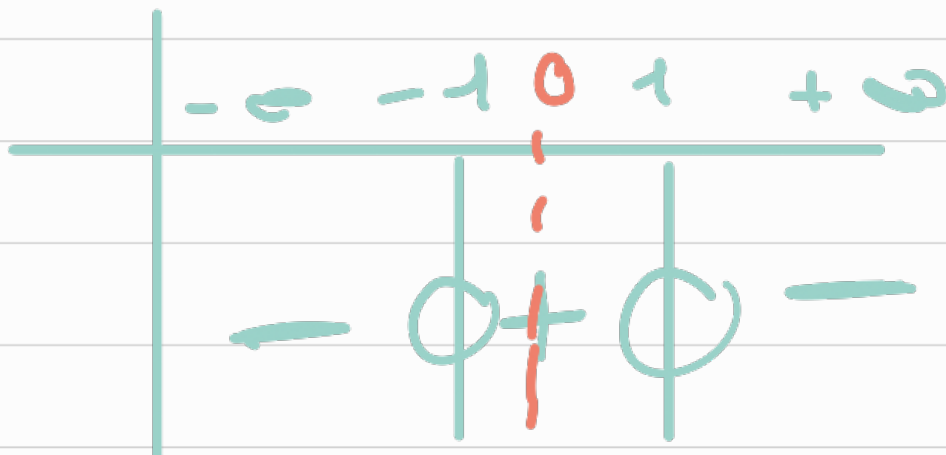
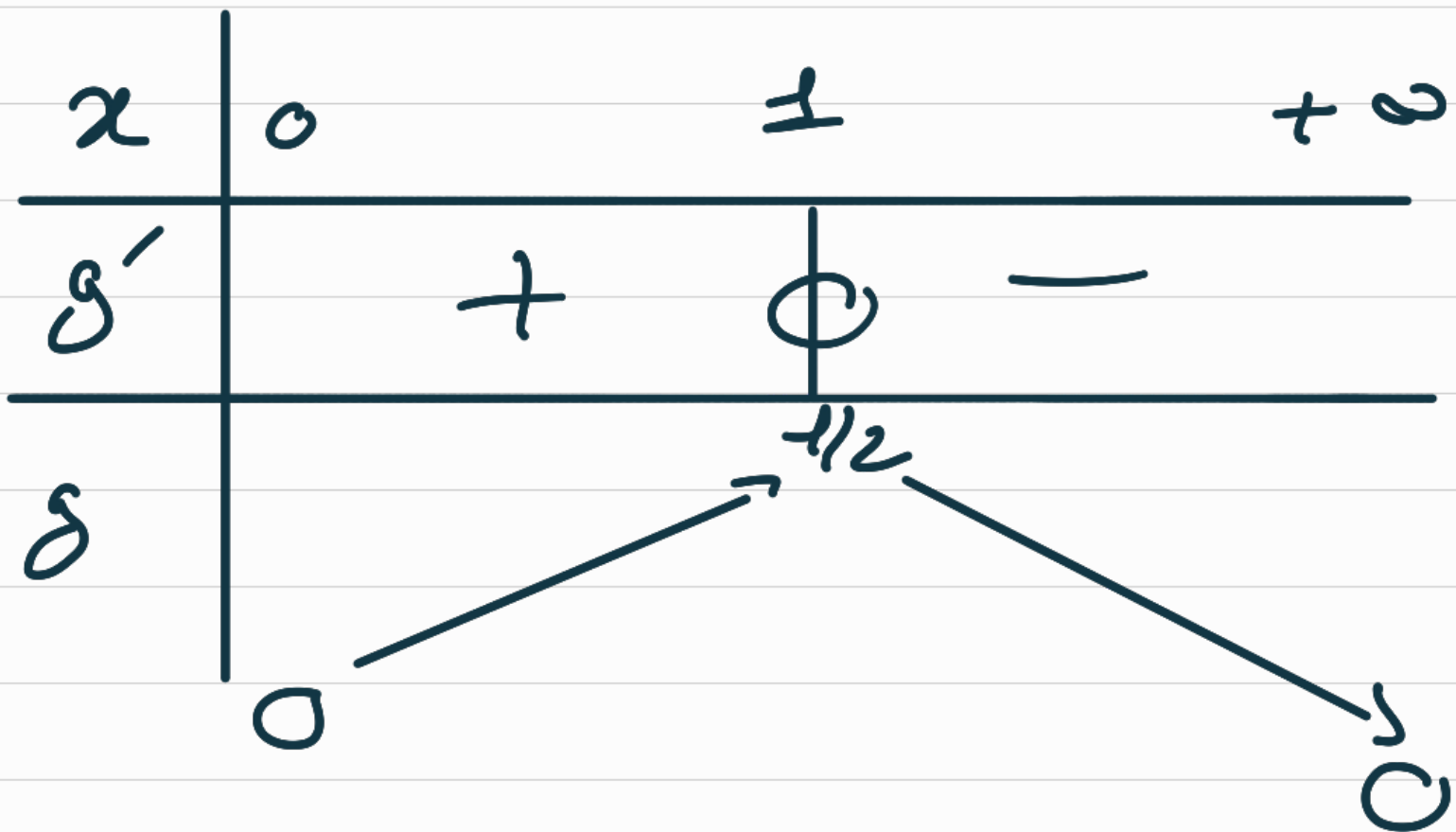
$$= \frac{x^2 + 1 - 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} > 0$$

$$\Delta = 0 - 4 \times -1 \times 1 = 4 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2}{-2} = -1$$



$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}$$

donc $0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$

sur $[0; +\infty[$

$$2) \quad u_n = \int_n^{2n} \frac{x e^{-x}}{x^2 + 1} dx$$

$$0 \leq u_n, \text{ car } x \mapsto \frac{x e^{-x}}{x^2 + 1} > 0 \\ \text{sur } [n; 2n]$$

$$\text{or } \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{x e^{-x}}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2} e^{-x}$$

$$\int_n^{2n} \frac{x e^{-x}}{x^2 + 1} dx \leq \int_n^{2n} \frac{1}{2} e^{-x} dx$$

$$u_n \leq \int_n^{2n} \frac{1}{2} e^{-x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{-1} e^{-x} \right]_n^{2n}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} e^{-2n} \right) - \left(-\frac{1}{2} e^{-n} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2n} + \frac{1}{2} e^{-n}$$

donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} (e^{-n} - e^{-2n})$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n}$

donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} (e^{-n} - e^{-2n})$

donc par le théorème
des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$