

Exercice 2 (6 points)

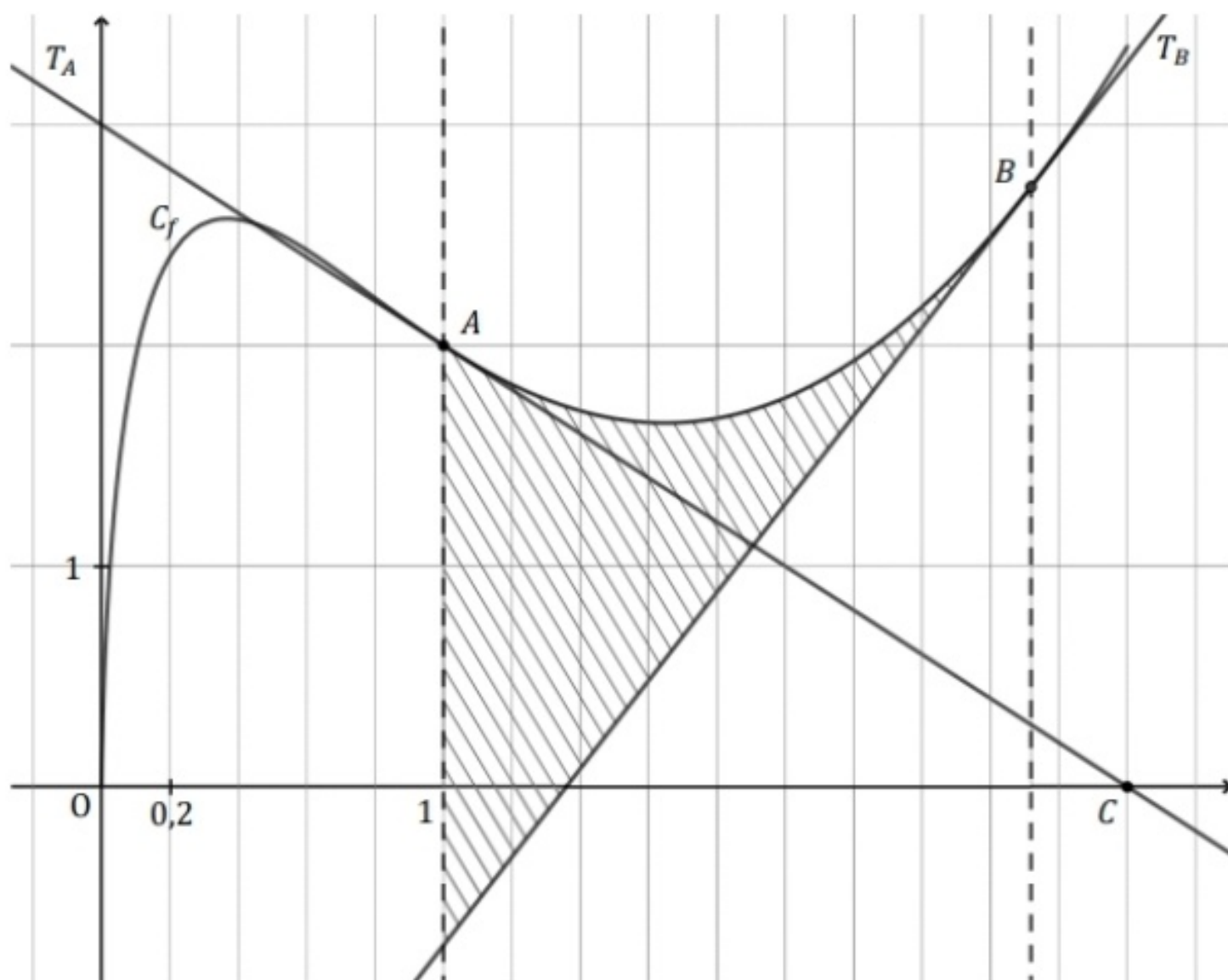
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Soutien scolaire maths

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f , notée C_f , sur l'intervalle $]0; 3]$;
- la droite T_A , tangente à C_f au point $A(1; 2)$;
- la droite T_B , tangente à C_f au point $B(e; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3; 0)$



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0; 3]$?
tangentes horizontales
3. Quel est le signe de $f''(0, 2)$?

Partie B : Etude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \left(2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 2 \right)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

$$\Delta(x) = 0$$

2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.

On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

3. On admet que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = 2(\ln(x))^2 + \ln(x) - 1.$$

- a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$

$$f''(x) = \frac{1}{x} (4\ln(x) + 1).$$

Partie A :

1) $f'(1) = \frac{2-0}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$

2) f semble avoir deux tangentes horizontales, donc l'équation $f'(x) = 0$ admet 2 solutions sur $]0; 3[$

3) f semble concave au point $0,2$ donc $f''(0,2) < 0$

Partie D:

1) $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2h(x)^2 - 3h(x) + 2 = 0$$

or $x \neq 0$, car $x \in]0; +\infty[$

de plus si on pose $x = h(x)$

$2x^2 - 3x + 2 = 0$ n'a pas de solution.

Donc $f(x) \neq 0$ sur $]0; +\infty[$.

et $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

$$2) \underbrace{2(h(x))^2}_{\substack{\rightarrow x \rightarrow +\infty \\ = +\infty}} \left(\underbrace{2 - \frac{3}{h(x)} + \frac{2}{(h(x))^2}}_{\text{Somme}} \right)$$

$$2 - 0 + 0$$

$$+ \infty \times 2 = +\infty$$

x	0	$e^{-\frac{1}{4}}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$

donc f est concave sur $]0; e^{-1/4}]$ et convexe sur $[e^{-1/4}; +\infty[$.

et $P_{e^{-1/4}}$ point d'inflexion et

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

c. Montrer que la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

$\hookrightarrow$ convexe sur $[1; +\infty[$, donc $e \in [1; +\infty[\Rightarrow f > T_B$

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite

$$y = 2x - e.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^e x \ln(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4} = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} \ln(e) - \frac{1}{2} \ln(1) \right) - \int_1^e \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f , la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

On admet que $\int_1^e x (\ln(x))^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4}$.

En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

$$\int_1^e f(x) - (2x - e) dx = \dots$$

$$\hookrightarrow \ln(x) + \frac{1}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) > -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x > e^{-1/2}$$