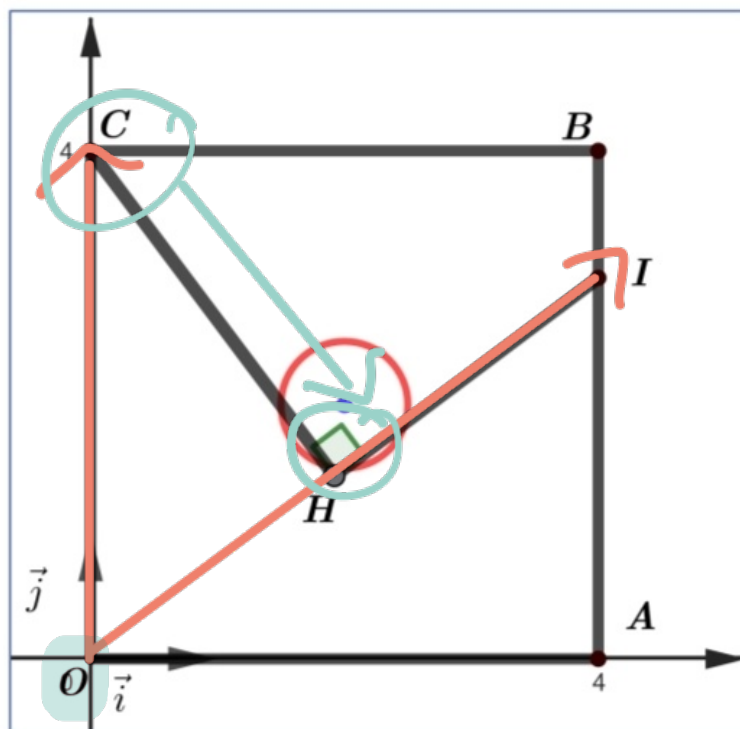


Produit scalaire

Exercice 1 (X points)

On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



On dispose des données suivantes :

$O(0;0)$

- Le quadrilatère $OABC$ est un carré de côté 4 ;
- On a $A(4;0)$, $B(4;4)$, $C(0;4)$, $I(4;3)$;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI) ;
- ~~On note $\mathcal{E}$ le cercle de centre $D(2;2)$ et de rayon 0,5~~

1.a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OC}$.

b. En déduire le produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OC}$.

2. a. Exprimer le produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OC}$ en fonction des longueurs OH et OI .

b. Calculer la longueur OI .

c. En déduire que $OH = 2,4$.

3. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CH) .

b. Justifier qu'une équation du cercle $\mathcal{E}$ est :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0.$$

c. Le point $M(1,5;2)$ appartient-il à l'intersection du cercle $\mathcal{E}$ et de la droite (CH) ? Justifier.

Aide au calcul.

$$0,5^2 = 0,25$$

$$1,5^2 = 2,25$$

$$2,5^2 = 6,25$$

$$5 \times 2,4 = 12$$

1) a) $\vec{OI}(4;3)$

$\vec{OC}(0;4)$

b) $\vec{u}(x;y) \quad \vec{v}(x';y')$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

$\vec{OI} \cdot \vec{OC} = 4 \times 0 + 3 \times 4$

$= 0 + 12$

$= 12$

2) a) $\vec{OI} \cdot \vec{OC} = \vec{OI} \cdot \vec{OH}$
 $= OI \times OH$) même sens

3) $O(0;0)$ $I(4;3)$

norme = longueur = distance

↳

$$A(x_A; y_A) \quad B(x_B; y_B)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$OI = \sqrt{\overset{x_I - x_O}{4^2} + \overset{y_I - y_O}{3^2}}$$

$$= \sqrt{16 + 9}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

$$c) \vec{OI} \cdot \vec{OC} = OI \times OH$$

$$12 = 5 \times OH$$

$$\text{done } OH = \frac{12}{5} = 2,4$$

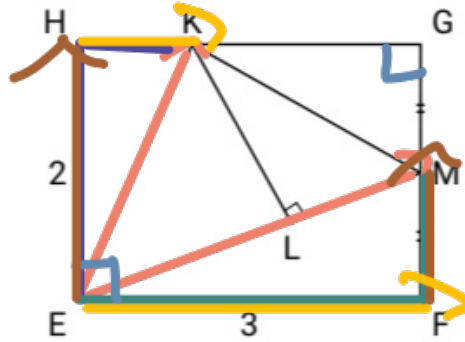
Exercice 3 (~6 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

$EFGH$ est un rectangle avec $EH = 2$ et $EF = 3$. M est le milieu de $[FG]$ et K est défini par $\vec{HK} = \frac{1}{3}\vec{HG}$.

L est le projeté orthogonal de K sur la droite (EM) .



1. Montrer que $\vec{EK} \cdot \vec{EM} = 5$. On pourra s'aider de la relation de Chasles.
2. En écrivant le produit scalaire de $\vec{EK} \cdot \vec{EM}$ de deux manières différentes, déterminer :
 - (a) La longueur EL .
 - (b) Une mesure de l'angle $\widehat{KEM}$.

$$\begin{aligned} 1) \quad & \vec{EK} \cdot \vec{EM} \\ &= (\vec{EH} + \vec{HK}) \cdot (\vec{EF} + \vec{FM}) \\ &= \underbrace{\vec{EH} \cdot \vec{EF}}_{=0} + \vec{EH} \cdot \vec{FM} + \vec{HK} \cdot \vec{EF} + \underbrace{\vec{HK} \cdot \vec{FM}}_{=0} \end{aligned}$$

$$= 0 + \vec{EH} \cdot \vec{FM} + \vec{HK} \cdot \vec{EF} + 0$$

$$= \underbrace{\vec{EH} \cdot \vec{FM}}_{EH \times FM} + \underbrace{\vec{HK} \cdot \vec{EF}}_{HK \times EF}$$

$$= 2 \times 1 + 1 \times 3$$

$$= 2 + 3$$

$$= 5$$

2) a) $\vec{EK} \cdot \vec{EM} = \vec{EL} \cdot \vec{EM}$
 $= EL \times EM$

Pythagore

$$\begin{aligned}
 EM^2 &= EF^2 + FM^2 \\
 &= 3^2 + 1^2 \\
 &= 9 + 1
 \end{aligned}$$

donc $EM^2 = 10$ et $EM = \sqrt{10}$.

$$\vec{EK} \cdot \vec{EM} = EL \times EM$$

$$S = EL \times \sqrt{10}$$

donc $EL = \frac{S}{\sqrt{10}}$

$$b) \vec{E}_K \cdot \vec{E}_M = E_K \times E_M \times \cos(\vec{k} \cdot \vec{E}_M)$$

$$E_K^2 \stackrel{\text{Pythagore}}{=} E_H^2 + H_K^2$$

$$= 2^2 + 1^2 = 4 + 1$$

$$\text{donc } E_K^2 = 5 \text{ et } E_K = \sqrt{5}$$

$$\text{donc } \vec{E}_K \cdot \vec{E}_M = E_K \times E_M \times \cos(\vec{k} \cdot \vec{E}_M)$$

$$5 = \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \cos(\vec{k} \cdot \vec{E}_M)$$

$$\text{donc } \cos(\vec{k} \cdot \vec{E}_M) = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{6}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{2 \times 3}} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{5}{(\sqrt{5})^4 \times \sqrt{2}} = \frac{5}{5 \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $\cos(\widehat{KEM}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\widehat{KEM} = \frac{\pi}{4}$.