

Variables aléatoires

exercice 4:

1) $Y = 100 X_A + 250 X_B - 700 \text{ €}$

2) $E[Y] = E[100 X_A + 250 X_B - 700 \text{ €}]$

^{par}
linéarité $= 100 E[X_A] + 250 E[X_B] - 700 \text{ €}$

$$= 100 \times 7000 + 250 \times 5000 - 700000$$

$$= 1250000$$

• $V(Y) = V(100 X_A + 250 X_B - 700 \text{ €})$

Comme X_A et X_B sont indépendantes, alors:

$$= V(100 \times A) + V(250 \times B - 700000)$$

$$V(ax+b) = a^2 V(x)$$

$$= 100^2 V(x_A) + 250^2 V(x_B)$$

$$V(Y) = 100^2 \times (1300)^2 + 250^2 \times (800)^2$$

$$= 50\ 690\ 000\ 000$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 238\ 537$$

exercice 6:

1) $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(-100; \frac{1}{3})$

2)

6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées $1, 2, 3, \dots, N$ où N est un entier naturel non nul.

On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, $\dots$, X_N pour la ville N .

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63.

On considère la variable aléatoire $M_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$.

a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?

b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.

c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N .

Montrer que $V(M_N) = \frac{6,63}{N}$.

d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95$$

6) b) $E[M_N]$

$$= E\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}\right]$$

linéarité

$$= \frac{1}{N} \left(\underbrace{E[X_1]}_{7,14} + \dots + \underbrace{E[X_N]}_{7,14} \right)$$

$$= \frac{1}{N} \times 7,14 \times N$$

$$= 7,14.$$

$$c) \quad V(\pi_n)$$

$$= V\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left(\underbrace{V(X_1) + \dots + V(X_n)}_{\text{car } X_1, \dots, X_n \text{ ind.}} \right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \times 6,63 \times \cancel{n}$$

$$= \frac{6,63}{n}$$

d) D'après Bienyamé - Tchelychev

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|M_n - \underbrace{E[M_n]}_{7,14}| > a) \leq \frac{\sqrt{6n}}{a^2}$$

$$\mathbb{P}(7 < M_n < 7,28) > 0,95.$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(7 - 7,14 < M - 7,14 < 7,28 - 7,14) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(-0,14 < M - 7,14 < 0,14) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|M - 7,14| < 0,14) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(|M - 7,14| \geq 0,14) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|M - 7,14| > 0,14) \leq 0,05$$

done on a :

$$\frac{6,63}{N \times (0,14)^2} \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow 338,265 \leq 0,05 \times N$$

$$\Leftrightarrow \frac{338,265}{0,05} \leq N$$

$$\Leftrightarrow 6765,31 \leq N$$

donc $N = 6766$.