

6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées $1, 2, 3, \dots, N$ où N est un entier naturel non nul.

On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, $\dots$, X_N pour la ville N .

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63.

On considère la variable aléatoire $M_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$.

a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?

b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.

c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N .

Montrer que $V(M_N) = \frac{6,63}{N}$.

d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95$$

$$b) E[M_N]$$

$$= E\left[\frac{X_1 + \dots + X_N}{N}\right]$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$= \frac{1}{N} (E[X_1] + \dots + E[X_N])$$

$$= \frac{1}{\cancel{N}} \times 7,14 \times \cancel{N}$$

$$= 7,14.$$

c) $V(ax+b) = a^2 V(x)$

Si X et Y sont indépendantes,
alors :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

$$V(\Gamma_N) = V\left(\frac{X_1 + \dots + X_N}{N}\right)$$

car $X_1, \dots, X_N$ sont indep. $\hookrightarrow$

$$= \frac{1}{N^2} \left(V(X_1) + \dots + V(X_N) \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{N}} \times 6,63 \times \cancel{N} = \frac{6,63}{N}$$

d) Dienyarné - Tchebychev:

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|X - E[X]| > a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

$$\mathbb{P}(7 < \Pi_N < 7,28) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(7 - 7,14 < \Pi_N - 7,14 < 7,28 - 7,14) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(-0,14 < \Pi_N - 7,14 < 0,14) > 0,95$$

$$\mathbb{P}(|\Pi_N - 7,14| < 0,14)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|\Pi_N - E[\Pi_N]| < 0,14) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(|\Pi_N - E[\Pi_N]| \geq 0,14) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|\Pi_N - E[\Pi_N]| \geq 0,14) \leq \frac{0,95 - 1}{-1} = 0,05$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|\pi_N - E[\pi_N]| > 0,14) \leq 0,05$$

or d'après l'inégalité de Bienyamé - Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|\pi_N - E[\pi_N]| > 0,14) \leq \frac{V(\pi_N)}{(0,14)^2}$$

donc on veut :

$$\frac{V(\pi_N)}{0,0196} = \frac{6,63}{N \times 0,0196} \leq 0,05.$$

$$\Leftrightarrow \frac{338,265}{N} \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow \frac{338,265}{0,05} \leq N$$

$$\Leftrightarrow 6765,3 \leq N.$$

on trouve $N = 6766$

Partie B

On choisit au hasard une personne venue un week-end au centre multisports. On note T_1 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du samedi, et T_2 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du dimanche. On admet que :

- T_1 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_1) = 40$ et d'écart-type $\sigma(T_1) = 10$;
- T_2 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_2) = 60$ et d'écart-type $\sigma(T_2) = 16$;
- les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.

On note T la variable aléatoire donnant le temps total d'attente avant les accès aux activités sportives lors des deux jours, exprimé en minute. Ainsi on a $T = T_1 + T_2$.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer que la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T est égale à 356.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour une personne choisie au hasard parmi celles venues un week-end au centre multisports, la probabilité que son temps total d'attente T soit strictement compris entre 60 et 140 minutes est supérieure à 0,77.

$$\begin{aligned} 1) \quad E[T] &= E[T_1 + T_2] \\ &\stackrel{\text{Linéarité}}{=} E[T_1] + E[T_2] \\ &= 40 + 60 \\ &= 100 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$2) V(T) = V(T_1 + T_2)$$

$$= V(T_1) + V(T_2)$$

car T_1 et T_2
sont indépendants

$$= 10^2 + 16^2$$

$$= 356$$

à montrer

$$3) P(60 < T < 140) \quad 7,0,77$$

$$= P(60 - 100 < T - 100 < 140 - 100)$$

$$= P(-40 < T - 100 < 40)$$

$$= P(|T - E[T]| < 40)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|T - E[T]| > 40)$$

d'après l'inégalité de
Bernoulli - Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|T - E[T]| > 40) \leq \frac{V(T)}{40^2}$$

$$\leq \frac{356}{1600}$$

$$\leq 0,2225$$

$$\text{donc : } \mathbb{P}(|T - E[T]| > 40) \leq 0,2225$$

$$- \mathbb{P}(|T - E[T]| > 40) \geq -0,2225$$

$$\geq 1 - \mathbb{P}(|T - E[T]| > 40) \geq 1 - 0,2225 \\ \geq 0,7775$$

done :

$$P(60 < T < 40)$$

$$= 1 - P(|T - E[T]| > 40)$$

$$> 0,7775$$

done :

$$P(60 < T < 40) > 0,77.$$