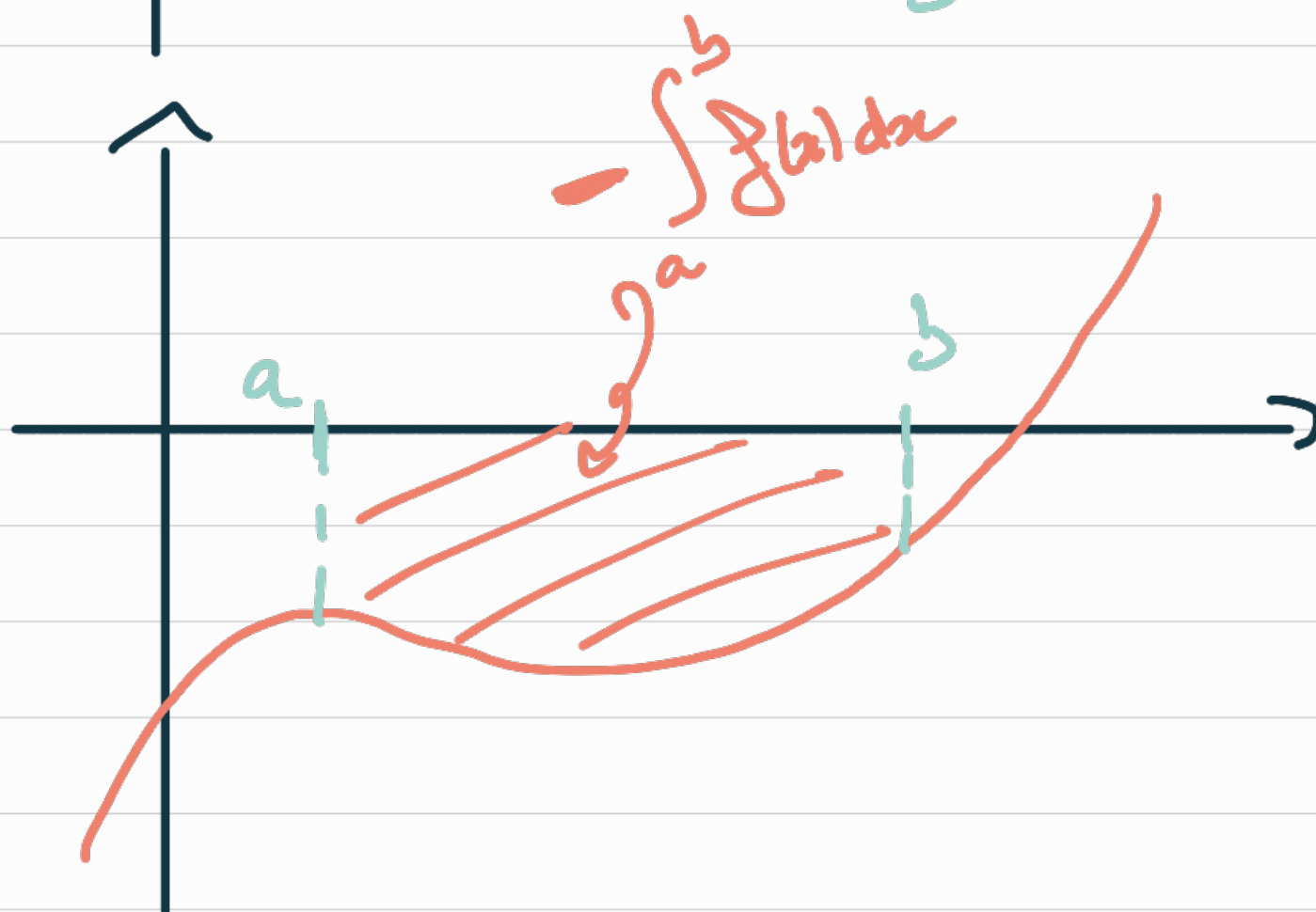
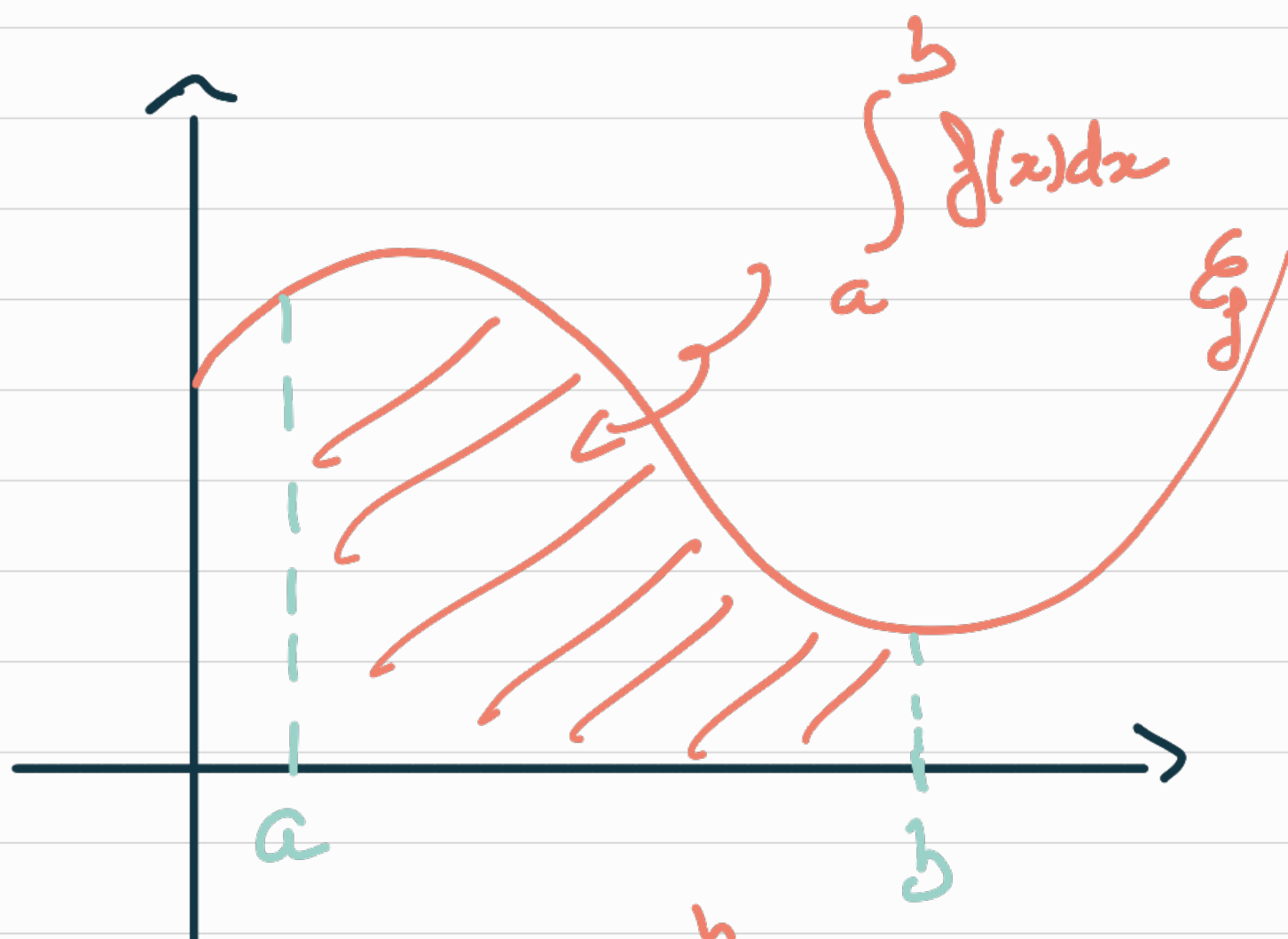


Calculus integral



$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b$$

primitive

$$= F(b) - F(a)$$

$$\bullet \int_a^b (k f(x) + g(x)) dx$$

$$= k \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

• aire entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$

$$\int_a^b f(x) dx$$

• aire entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la courbe $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$f \geq g$

• intégration par parties

$$\int_a^b u' \times \underbrace{v}_{\text{primitive}} = \left[\underbrace{u \times v}_{\text{dérivée}} \right]_a^b - \int_a^b \underbrace{u \times v'}_{\text{dérivée}}$$

• $\int \underbrace{x}_{u'} \times \underbrace{\ln(x)}_v dx$

• $\int \underbrace{x}_v \times \underbrace{e^x}_{u'} dx$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

c, valeur moyenne de f sur $[0; b]$.

Exercise:

$$\bullet \int_{-4}^9 3 \, dx$$

$$= \left[3x \right]_{-4}^9$$

$$= (3 \times 9) - (3 \times (-4))$$

$$= 27 + 12$$

$$= 39.$$

$$\bullet \int_1^5 (6x^2 + 8x + 2) dx$$

$$= \left[2x^3 + 4x^2 + 2x \right]_1^5$$

$$= \left(2 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 2 \times 5 \right)$$

$$- \left(2 \times 1^3 + 4 \times 1^2 + 2 \times 1 \right)$$

$$= 352$$

exercice :

Soit $f(x) = (3x^2 + 6x - 9)e^{x^3 + 3x^2 - 9x + 8}$

• Calculer l'aire entre l'axe des abscisses et E_f sur l'intervalle $[0; 5]$.

$$\begin{aligned} & \int_0^5 f(x) dx \\ &= \int_0^5 (3x^2 + 6x - 9)e^{x^3 + 3x^2 - 9x + 8} dx \\ &= \left[e^{x^3 + 3x^2 - 9x + 8} \right]_0^5 \end{aligned}$$

Diagramme de la solution :

- Le premier terme $3x^2 + 6x - 9$ est noté u' en vert.
- Le second terme $e^{x^3 + 3x^2 - 9x + 8}$ est noté e^u en rouge.
- Une accolade orange relie u' et e^u .
- Une accolade orange encadre l'ensemble de l'intégrande $(3x^2 + 6x - 9)e^{x^3 + 3x^2 - 9x + 8}$.
- Le résultat final $e^{x^3 + 3x^2 - 9x + 8}$ est noté $u'e^u$ en rouge.

$$= e^{5^3 + 3 \times 5^2 - 9 \times 5 + 8} - e^{0^3 + 3 \times 0^2 - 9 \times 0 + 8}$$

$$= e^{163} - e^8$$

$$\approx 6,17 \times 10^{70} \quad \underline{\underline{\text{u.a}}}$$

exercice :

Déterminer la valeur moyenne de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[4; 25]$.

$$m = \frac{1}{25-4} \int_4^{25} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{21} \int_4^{25} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \left[2\sqrt{x} \right]_4^{25}$$

$$= 2\sqrt{25} - 2\sqrt{4}$$

$$= 6$$

$$m = \frac{1}{21} \times 6 = \frac{2}{7}.$$

Exercice 1 (Pondichéry, avril 2014) Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x} + 2x + 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

1. a) Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$. $\rightarrow g \geq 0$
- b) En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x + 2$.

$\hookrightarrow \mathcal{C}_f$ au dessus de Δ

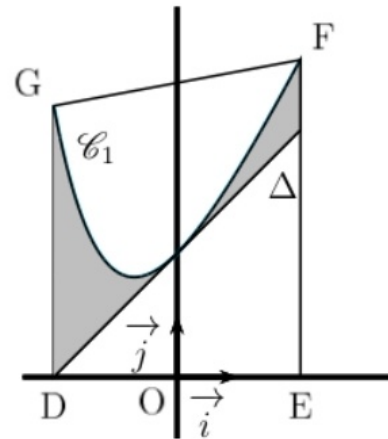
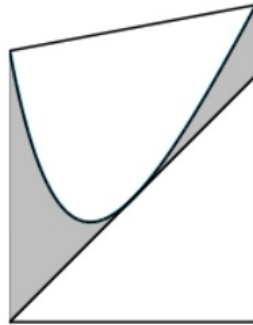
La figure ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite Δ .

Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.

Le contour du logo est représenté par le trapèze

DEFG où :

- D est le point de coordonnées $(-2 ; 0)$;
- E est le point de coordonnées $(2 ; 0)$;
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}_1$;
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathcal{C}_2$.



La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ , la courbe $\mathcal{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

$$\int_{-2}^2 g(x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 (e^{-x} + 2x + 1 - x - 2) dx$$

$$= \int_{-2}^2 (e^{-x} + x - 1) dx$$

$$= \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x \right]_{-2}^2$$

$$= \left(-e^{-2} + \frac{2^2}{2} - 2 \right)$$

$$- \left(-e^{-(-2)} + \frac{(-2)^2}{2} - (-2) \right)$$

$$= -e^{-2} - \left(-e^2 + 4 \right)$$

$$= -e^{-2} + e^2 - 4$$

$$\approx 3,25 \quad \underline{\text{u.a}}$$

exercice:

$$\int_0^1 \overbrace{x}^v \overbrace{e^{3x+2}}^{u'} dx$$

$$= \left[x \times \frac{1}{3} e^{3x+2} \right]_0^1$$

$$= \int_0^1 1 \times \frac{1}{3} e^{3x+2} dx$$

$$= \left(1 \times \frac{1}{3} e^{3 \times 1 + 2} - 0 \times \frac{1}{3} e^{3 \times 0 + 2} \right) - \int_0^1 \frac{1}{3} e^{3x+2} dx$$

$$= \frac{1}{9} e^s - \left[\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} e^{3x+2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{9} e^s - \left(\frac{1}{9} e^{3 \times 1 + 2} - \frac{1}{9} e^{3 \times 0 + 2} \right)$$

$$= \frac{1}{9} e^s - \frac{1}{9} e^5 + \frac{1}{9} e^2$$

$$= \frac{1}{9} e^s + \frac{1}{9} e^2.$$