

Exercice 4 (5 points)

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n , on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle. $\rightarrow 1,28 \text{ h.a.}$

2. On note h la fonction définie sur $[0; 20]$ par $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$.

On admet que h est croissante sur $[0; 20]$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.

L , croissante + majorée par 20 $\Rightarrow$ converge.

c. Justifier que $L = 15$.

3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
1 def seui():
2     n = 0
3     u = 1
4     while u < 14:
5         n = n + 1
6         u = -0,02u**2 + 1,3*u
7     return n
```

2) c) (u_n) converge vers L
et $u_{n+1} = h(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec
 h continue sur $[0; 20]$.

Donc L est solution de
 $h(x) = x$.

$$h(x) = x \quad \Leftrightarrow -0,02x^2 + 1,3x = x$$

$$\Leftrightarrow -0,02x^2 + 1,3x - x = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,02x^2 + 0,3x = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = (0,3)^2 - 4 \cdot (-0,02) \cdot 0 \\ &= 0,09 > 0\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0,3 - 0,3}{2 \cdot (-0,02)} = 15$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0,3 + 0,3}{2 \cdot (-0,02)} = 0$$

Donc $L = 15$

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. $\rightarrow \frac{15}{50} = 0,3$

2. Pour tout entier naturel n , on note v_n le taux de chlore, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.

On admet que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3$.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

$0,92P + 0,3 = P \iff 0,92P - P = -0,3 \iff -0,08P = -0,3 \iff P = 3,75$

$v_n \leq v_{n+1} \leq 4$
 $0,92v_n \leq 0,92v_n + 0,3$
 $0,92v_n \leq 0,82v_n + 3,68$
 $0,92v_n + 0,3 \leq 0,92v_n + 3,68$
 $v_{n+1} \leq v_n + 3,38 \leq 4$

3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
1 def alerte_chlore(s) :
2     n = 0
3     v = 0.7
4     while v <= s :
5         n = n + 1
6         v = 0.92 * v + 0.3
7     return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice. $\Rightarrow 16$.