

Exercice 2 (5 points)

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse.

La première injection est de 10 ml, puis toutes les heures, on lui injecte 1 ml.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang en prenant le modèle suivant :

- On estime que 20% de la quantité de médicament présente dans le sang est éliminée chaque heure ;
- Pour un entier naturel n , on note U_n la quantité de médicament en ml présente dans le sang au bout de n heures.

Ainsi $U_0 = 10$.

1. Justifier que $U_1 = 9$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,8U_n + 1$

3. La suite (U_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

4. On considère la suite (V_n) telle que : $V_n = U_n - 5$
Montrer que (V_n) est géométrique. Vous préciserez sa raison et son premier terme.

5.

a) Exprimer (V_n) en fonction de n .

b) En déduire (U_n) en fonction de n .

6. Voici un tableau de valeurs de la suite (U_n) :

n	8	9	10	11	12	13	14
U_n	5,838 861	5,671 089	5,536 871	5,429 497	5,343 597	5,274 878	5,219 902

n	15	16	17	18	19	20	21
U_n	5,175 922	5,140 737	5,112 59	5,090 072	5,072 058	5,057 646	5,046 117

n	22	23	24	25	26	27	28
U_n	5,036 893	5,029 515	5,023 612	5,018 889	5,015 112	5,012 089	5,009 671

On souhaite arrêter les injections dès lors que la quantité de médicament en ml présente dans le sang est inférieure à 5,1 ml. Au bout de combien d'heures après la première injection faudra-t-il cesser les injections ? (Pas de justification demandée)

$$\begin{aligned}
 1) \quad u_1 &= 10 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) + 1 \\
 &= 10 \times 0,8 + 1 \\
 &= 8 + 1 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

2) . perdre 20% de la quantité de médicament revient à multiplier u_n par 0,8 $\rightarrow 0,8u_n$

• Ajouter 1 ml par heure revient à ajouter 1 à $0,8u_n$.

donc $u_{n+1} = 0,8u_n + 1.$

$$3) \quad u_0 = 10 \quad u_1 = 9$$

$$u_2 = 0,8u_1 + 1$$

$$= 0,8 \times 9 + 1$$

$$= 8,2$$

$$\bullet \quad u_1 - u_0 = 9 - 10 = -1$$

$$u_2 - u_1 = 8,2 - 9 = -0,8$$

donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$$\bullet \quad \frac{u_1}{u_0} = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$\frac{u_2}{u_1} \simeq 0,91$$

donc (u_n) n'est pas géométrique

$$\begin{aligned} 4) \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 5 \\ &= 0,8u_n + 1 - 5 \end{aligned}$$

$$= 0,8u_n - 4$$

$$= 0,8 \left(u_n - \frac{4}{0,8} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{0,8} &= 4 \times \frac{10}{8} \\ &= \frac{40}{8} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$= 0,8(u_n - 5)$$

$$= 0,8 v_n$$

donc (v_n) est géométrique
de raison 0,8 et de premier
terme $v_0 = u_0 - 5 = 1 - 5 = -4$

5) a) (v_n) est géométrique de raison $0,8$ et de premier terme $v_0 = -4$.

$$v_n = v_0 \times q^n = -4 \times (0,8)^n$$

b) $v_n = u_n - 5 \Leftrightarrow v_n + 5 = u_n$

donc $u_n = v_n + 5$

$$= -4 \times (0,8)^n + 5.$$

Exercice 2**5 points**

Aujourd'hui les chardons (une plante vivace) ont envahi 300 m^2 des champs d'une région. Chaque semaine, la surface envahie augmente de 5% par le développement des racines, auquel s'ajoutent 15 m^2 suite à la dissémination des graines.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la surface envahie par les chardons, en m^2 , après n semaines; on a donc $u_0 = 300 \text{ m}^2$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2 .

(b) Montrer que la suite (u_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique ni géométrique.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,05u_n + 15$.

2. On considère la suite (v_n) , définie pour tout entier naturel n , par: $v_n = u_n + 300$.

(a) Calculer v_0 , puis montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,05$.

(b) Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que $u_n = 600 \times 1,05^n - 300$.

3. Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

$$\textcircled{1} \textcircled{a) \quad} u_1 = u_0 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 15 \\ = 330$$

$$u_2 = u_1 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 15 \\ = 361,5$$

$$\textcircled{b) \quad} u_1 - u_0 = 330 - 300 = 30 \quad \textcircled{?} \neq \\ u_2 - u_1 = 361,5 - 330 = 31,5$$

donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$$\bullet \frac{u_1}{u_0} = \frac{330}{300} = 1,1 \quad \uparrow \neq$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{381,5}{330} \approx 1,0954 \dots$$

donc (u_n) n'est pas géométrique

$$\begin{aligned} \text{2) a) } v_{n+1} &= u_{n+1} + 300 \\ &= 1,05u_n + 15 + 300 \\ &= 1,05u_n + 315 \\ &= 1,05 \left(u_n + \frac{315}{1,05} \right) \end{aligned}$$

$\overset{=300}{\text{red circle around } \frac{315}{1,05}}$

$$= 1,05 (u_n + 300)$$

$$= 1,05 v_n$$

donc (v_n) est géométrique
de raison 1,05 et de
premier terme $v_0 = u_0 + 300$

$$= 300 + 300$$

$$= 600$$

$$\hookrightarrow v_n = v_0 \times q^n$$

$$= 600 \times (1,05)^n$$

$$v_n = u_n + 300 \Leftrightarrow u_n = v_n - 300$$

$$\text{d'où } u_n = 600 \times (1,05)^n - 300$$

$$3) \quad u_8 = 600 \times (1,05)^8 - 200 \\ \approx 587$$

on n'a pas encore doublé de volume au bout de 8 semaines.