

# Intégrations et primitive

exercice 2:  $6\left(q^3 + \frac{q}{2}\right)$

6)  $\int_2^6 \frac{6q^3 + 3q}{\sqrt{q^4 + q^2 + 1}} dq.$

$u \rightarrow u' = 4q^3 + 2q$

$= 6 \left( q^3 + \frac{q}{2} \right)$

$\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$

$$= \left[ 6 \times \frac{1}{4} \times 2 \sqrt{q^4 + q^2 + 1} \right]_2^6$$

$$= \left[ 3 \sqrt{q^4 + q^2 + 1} \right]_2^6$$

$$= 3\sqrt{6^4 + 6^2 + 1} - 3\sqrt{2^4 + 2^2 + 1}$$

$$= 3(\sqrt{1333} - \sqrt{21})$$

exercice 4:

1)  $\int_{-1}^5 e^x (e^x - 5)^4 dx$

Annotations:  $u' = e^x$  (green arrow),  $u$  (red bracket),  $u' u^4$  (red arrow),  $\frac{u^5}{5}$  (red arrow).

$$= \left[ \frac{(e^x - 5)^5}{5} \right]_{-1}^5$$

$$= \frac{(e^5 - 5)^5}{5} - \frac{(e^{-1} - 5)^5}{5}$$

**Exercice 4** L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

### Partie A

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on désigne par  $f_n$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par  $f_n(x) = x^n e^x$ . On note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère orthonormé.

On désigne par  $(I_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1 par :  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ .

1. a) On désigne par  $F_1$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par :  $F_1(x) = (x - 1)e^x$ .

Vérifier que  $F_1$  est une primitive de la fonction  $f_1$ .

b) Calculer  $I_1$ .

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1, on

a  $I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$ .

3. Calculer  $I_2$ .

$$\begin{aligned} 1) a) F_1'(x) &= 1 \times e^x + (x-1) \times e^x \\ &= \cancel{e^x} + x e^x - \cancel{e^x} \\ &= x e^x \\ &= f_1(x). \end{aligned}$$

donc  $F_1$  est une primitive  
de  $f_1$ .

$$b) I_1 = \int_0^1 x e^x dx$$

$$= \left[ (x-1)e^x \right]_0^1$$

$$= \left[ (1-1)e^1 \right] - \left[ (0-1)e^0 \right]$$

$$= 0 - (-1 \times 1)$$

$$= 1$$

$$2) I_{n+1} = \int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_v \underbrace{e^x}_{u'} dx$$

$$\int u'v = [uv] - \int uv' \quad \text{primitive}$$

$$= \left[ \underbrace{x^{n+1}}_v \underbrace{e^x}_u \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{(n+1)x^n}_{v'} \underbrace{e^x}_u dx$$

$$= \left( 1^{n+1} e^1 - \cancel{0^{n+1}} e^0 \right)$$

$$- (n+1) \underbrace{\int_0^1 x^n e^x dx}_{I_n}$$

$$= e - (n+1)I_n.$$

$$3) I_{n+1} = e - (n+1) I_n$$



$$I_2 = e - (1+1) I_1$$

$$= e - 2 I_1$$

$$= e - 2 \times 1$$

$$= e - 2$$

**Exercice 3 (Asie, juin 2014)** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note  $f_n$  la fonction définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  par  $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit le nombre  $I_n$  par  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ .

1. a) Démontrer que, pour tout  $x \in [0; 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$ .

b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $I_n \leq 1$ .

2. Démontrer que, pour tout  $x \in [0; 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$ .

3. Calculer l'intégrale  $\int_0^1 (1 - x^n) dx$ .

4. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite  $(I_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

1) a)  $1 + x^n > 1$  car  $x > 0$

donc  $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1}$  car  $x \mapsto \frac{1}{x}$   
est  $\searrow$

et  $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$

b)  $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

$$\alpha \quad \frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 1 dx$$

$$\Rightarrow I_n \leq \left[ x \right]_0^1 \\ = 1 - 0 = 1$$

done  $I_n \leq 1$ .

2)  $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$

$$\Rightarrow (1-x^n)(1+x^n) \leq 1$$



$$\Leftrightarrow 1^2 - (x^n)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^{2n} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -x^{2n} \leq 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow -x^{2n} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^{2n} \geq \frac{0}{-1} = 0$$

et ceci est toujours vraie  
 $\forall x \in [0; 1]$

$$\text{donc } 1 - x^n \geq \frac{1}{1+x^n}.$$

$$\forall x \in [0; 1].$$

$$3) \int_0^1 1 - x^n dx$$

$$= \left[ x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$= \left( 1 - \frac{1^{n+1}}{n+1} \right) - \underbrace{\left( 0 - \frac{0^{n+1}}{n+1} \right)}_{=0}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

4) m a:

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$$

$$\int_0^1 1 - x^n dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n$$

or on a aussi  $I_n \leq 1$

donc :

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$$

or  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$

donc d'après le théorème  
des gendarmes on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$$