

52 (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

a) (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme v_0 .

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= 2u_n - 1 - 1 \\ &= 2u_n - 2 \\ &= 2\left(u_n - \frac{2}{2}\right) \\ &= 2(u_n - 1) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est géométrique
de raison 2 et de premier
terme $v_0 = u_0 - 1 = 3 - 1 = 2$

b). $v_n = v_0 \times q^n$
 $= 2 \times 2^n$

• $v_n = u_n - 1$

$\Leftrightarrow v_n + 1 = u_n$

donc $u_n = 2 \times 2^n + 1$

$$c) u_{n+1} - u_n$$

$$= (2 \times 2^{n+1} + 1) - (2 \times 2^n + 1)$$

$$= 2 \times 2^{n+1} + \cancel{1} - 2 \times 2^n - \cancel{1}$$

$$= 2 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n$$

$$= 2 \times 2^n (2 - 1)$$

$$= 2 \times 2^n \times 1$$

$$= 2 \times 2^n > 0$$

donc (u_n) est croissante.

Exercice 1 (X points)

En 2020, une ville comptait 10 000 habitants.

On modélise l'évolution du nombre d'habitants de cette ville par la suite (u_n) définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,08u_n - 300 & , n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 10\,000 \end{cases} ;$$

où u_n représente le nombre d'habitants pour l'année 2020+n.

1. Indiquer ce que représente u_1 ^{↖ -10 500} et calculer sa valeur.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3750$.

a. Déterminer v_0 .

b. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a $v_{n+1} = 1,08v_n$.

c. En déduire la nature de la suite (v_n) .

d. Pour tout entier naturel n , exprimer, v_n en fonction de n .

e. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_n = 6250 \times 1,08^n + 3750$.

EXERCICE 3 : (7,5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 7}{3 - x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

$$f(2) = \frac{-2^2 + 4 \times 2 - 7}{3 - 2} = -3$$

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a : $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(3 - x)^2}$.

$$f'(2) = \frac{2^2 - 6 \times 2 + 5}{(3 - 2)^2} = -3$$

2. a) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.

b) La fonction f présente-t-elle des extrema locaux? Si oui, lesquels.

3. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$= -3(x - 2) - 3$$

$$= -3x - 3 \times (-2) - 3$$

$$= -3x + 6 - 3$$

$$= -3x + 3$$