

Exponentielle

①. définition

. l'unique fonction telle que :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1$$

est la fonction exponentielle

↳ $\exp(x)$ ou e^x

$$\cdot e^x > 0 \quad \cdot (e^x)' = e^x$$

$$\cdot e^0 = 1 \quad \cdot e^1 = e$$

. e^x est strictement croissante.

② - propriétés

$$\cdot e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$\cdot e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$\cdot e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$\cdot (e^a)^n = e^{a \times n}$$

③ - Equations et inéquations

$$\cdot e^x = e^y \quad (\Rightarrow) \quad x = y$$

$$\cdot e^x > e^y \quad (\Rightarrow) \quad x > y.$$

④ - Composition et exp

$$(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$$

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

• ~~$A = e^3 \times e^4$~~

• ~~$B = \frac{e^{-5}}{e^2}$~~

• ~~$C = \frac{e^{5x+7} \times e^{-x-3}}{e^{2x+3}}$~~

• $D = \frac{1}{e^{-1}}$

• ~~$E = e^2 \times e^{-4}$~~

• ~~$F = \frac{(e^{-5})^2}{e^2 \times e^{-6}}$~~

• $G = e^x \times e^{-x}$

• $H = (e^{3x+2})^2$

• ~~$I = e^{2x+1} \times e^{-3x+5}$~~

• ~~$J = \frac{e^{-x+1}}{e^{3x-4}}$~~

• $K = \frac{e^{x-7}}{e^{2x}} \times \frac{e^{3x+5}}{e^{-2x+1}}$
 $= e^{-x-7} \times e^{5x+4}$
 $= e^{4x-3}$

$$A = e^3 \times e^4 = e^{3+4} = e^7.$$

$$B = \frac{e^{-5}}{e^2} = e^{-5-2} = e^{-7}.$$

$$E = e^2 \times e^{-4} = e^{2-4} = e^{-2}$$

$$J = \frac{e^{-x+1}}{e^{3x-4}} = e^{-x+1-3x+4} = e^{-4x+5}$$

$$I = e^{2x+1-3x+5} = e^{-x+6}$$

$$F = \frac{(e^{-5})^2}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{e^{-5 \times 2}}{e^{2-6}}$$

$$= \frac{e^{-10}}{e^{-4}}$$

$$= e^{-10+4} = e^{-6}$$

$$C = \frac{e^{5x+7-x-3}}{e^{2x+3}}$$

$$= \frac{e^{4x+4}}{e^{2x+3}}$$

$$= e^{4x+4-(2x+3)}$$

$$= e^{4x+4-2x-3}$$

$$= e^{2x+1}$$

exercice :

$$\bullet e^x = e^3 \quad (\Rightarrow) \quad x = 3$$

$$\text{donc } \Delta = \{3\}.$$

$$\bullet e^x - e^{-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$

$$\text{donc } \Delta = \{-4\}.$$

$$\bullet e^x = 1 = e^0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{donc } \Delta = \{0\}$$

$$\bullet e^x - e = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^1$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{donc } \mathcal{S} = \{1\}.$$

$$\bullet e^{2x+4} = e^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+4 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2-4$$

$$\Leftrightarrow 2x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{donc } \mathcal{S} = \{-1\}.$$

$$\bullet e^x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow e^x = -5 \quad \times$$

$$\text{done} \quad \mathcal{D} = \emptyset$$

$$\bullet e^{-3x+5} = 1 = e^0$$

$$\Rightarrow -3x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow -3x = -5$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{done} \quad \mathcal{D} = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$$

Exercice 2 Dérivation

Dans chacun des cas, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et il faut déterminer $f'(x)$.

1. $f(x) = e^x + x^2$

$$(e^x)' = e^x$$

2. $f(x) = 3e^x + 4x + 5$

3. $f(x) = 3x^2 - 4e^x$

4. $f(x) = xe^x$

5. $f(x) = (1+x)e^x$

6. $f(x) = \frac{x^2 + 5}{e^x}$

1) $f'(x) = e^x + 2x$

2) $f'(x) = 3e^x + 4$

3) $f'(x) = 3 \times 2x - 4e^x$
 $= 6x - 4e^x.$

4) $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x$
 $= e^x(1+x)$

$$\begin{aligned}
 5) \quad f'(x) &= 1 \times e^x + (1+x) \times e^x \\
 &= e^x (1 + 1 + x) \\
 &= e^x (2 + x).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad f'(x) &= \frac{2x \times e^x - (x^2 + 5)e^x}{(e^x)^2} \\
 &= \frac{\cancel{e^x} (2x - \overbrace{(x^2 + 5)})}{(e^x)^{\cancel{2}}} \\
 &= \frac{2x - x^2 - 5}{e^x}.
 \end{aligned}$$