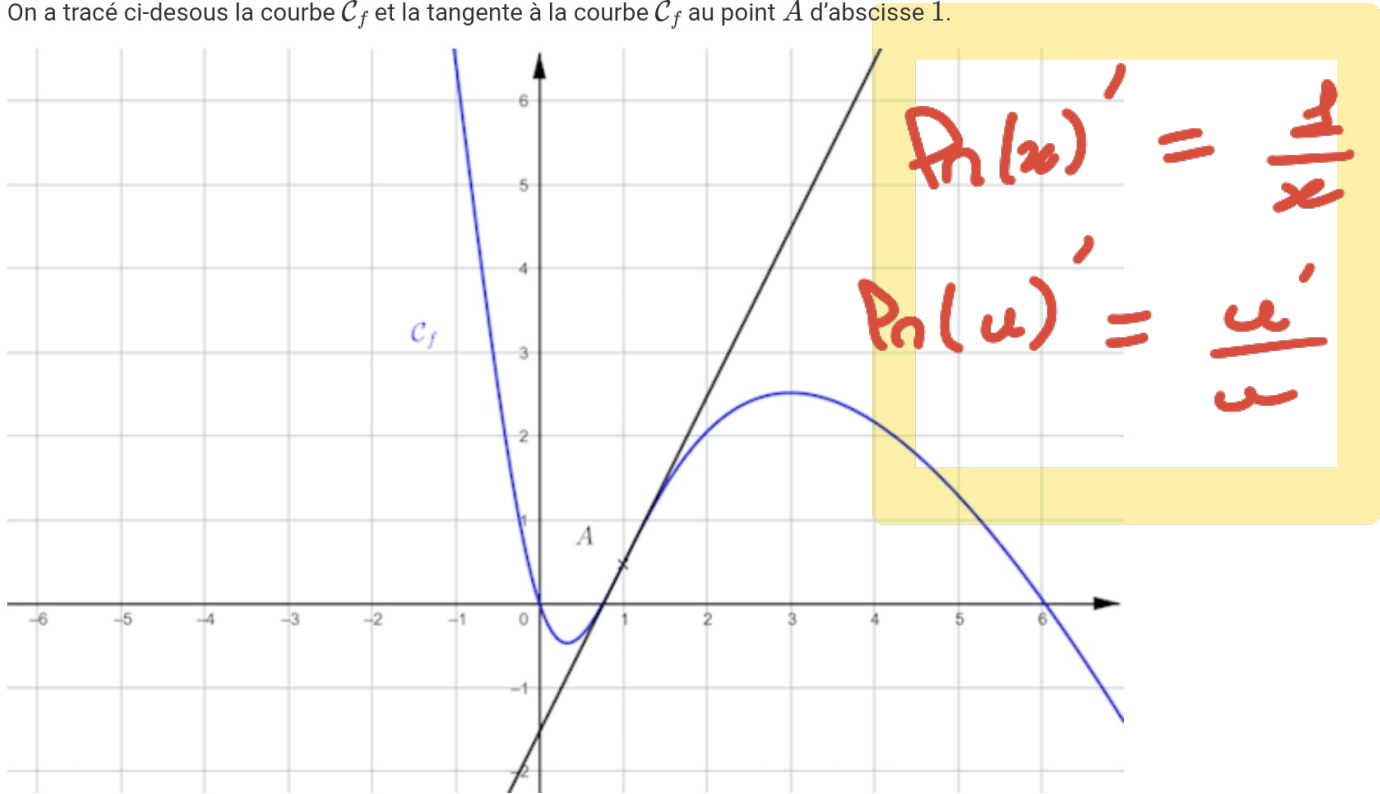


Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$ et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f , les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. a. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif, $-\infty$

$$f(x) = x \left(10 \frac{\ln(x)}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Handwritten notes: $10 \times 0 - 3 = -3$, $1 + \frac{1}{x^2} = 1$, $\ln(1) = 0$.

- b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.

4. a. Démontrer que pour tout x réel $f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$. $8/11 = 2$

- b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x ,

$$\Delta = b'^2 - 4ac = 0 - 4 \times 10 \times 10$$

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2} > 0$$

- a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.
- b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
- c. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$.

1) f semble convexe sur $]-\infty; +\infty[$ car E_f est au-dessus de sa tangente.

f semble concave sur $[1; +\infty[$ car E_f est au-dessus de sa tangente.

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1 = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$ par composition.

de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5\ln(x^2 + 1) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x = +\infty$.

donc par somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$3) \quad x \left(10 \frac{\ln(x)}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \cancel{x} \times \frac{10 \ln(x)}{\cancel{x}} - 3x + 5 \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)$$

$$= 10 \ln(x) - 3x + 5 \left[\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2) \right]$$

$$= 10 \ln(x) - 3x + 5 \ln(x^2 + 1) - 5 \ln(x^2)$$

$$= \cancel{10 \ln(x)} - 3x + 5 \ln(x^2 + 1) - \cancel{5 \times 2 \ln(x)}$$

$$= 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$$

$$= f(x)$$

$$x^2 \rightarrow 2x$$

$$\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$e^x \rightarrow e^x$$

$$\ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$$

$$u^2 \rightarrow 2u'u$$

$$\sqrt{u} \rightarrow \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$e^u \rightarrow u'e^u$$

$$\ln(u) \rightarrow \frac{u'}{u}$$

$$4) a) f'(x) = 5x \frac{2x}{x^2+1} - 3$$

$$= \frac{10x - 3(x^2+1)}{x^2+1}$$

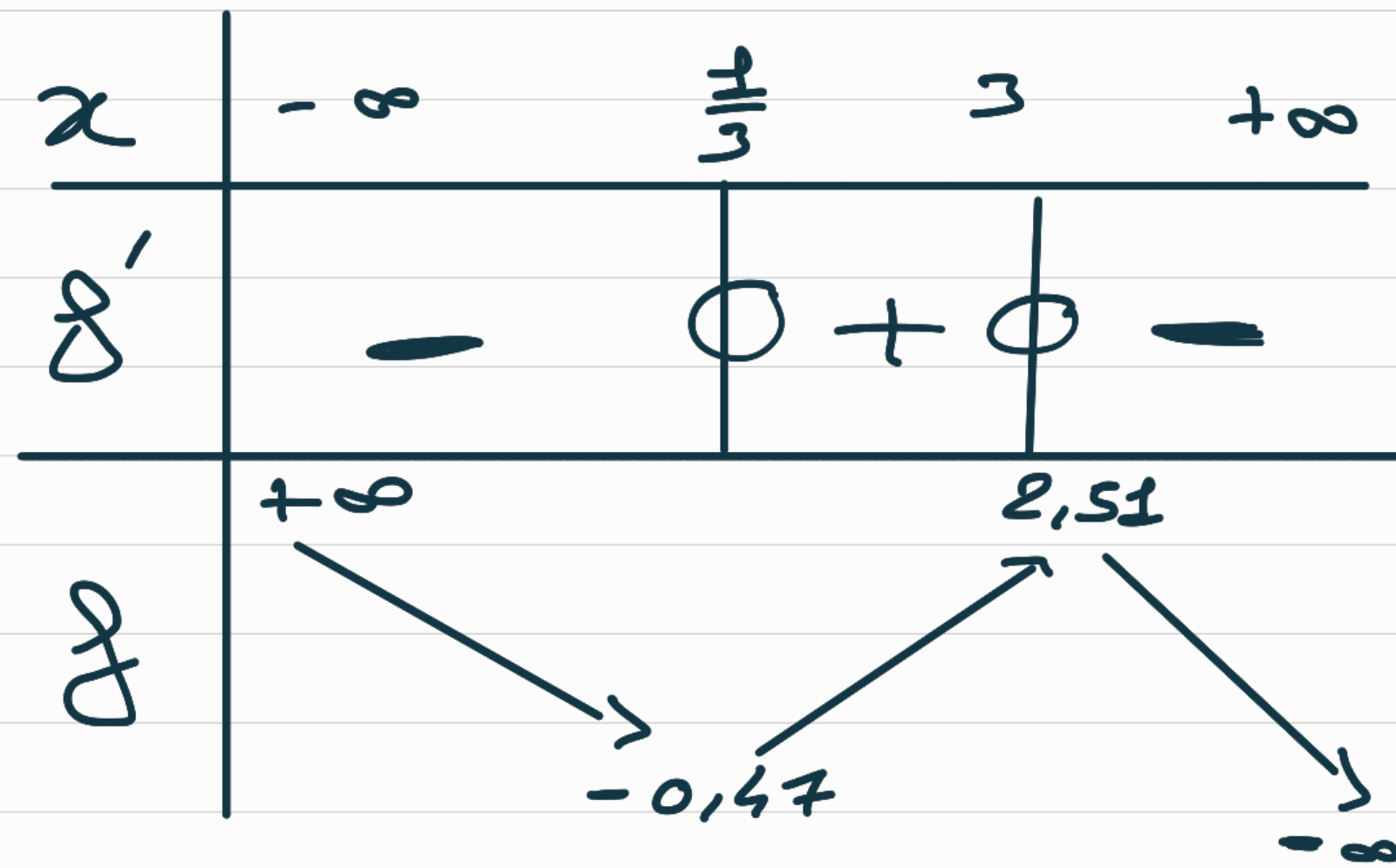
$$= \frac{10x - 3x^2 - 3}{x^2+1}$$

$$= \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2+1} > 0 \quad ??$$

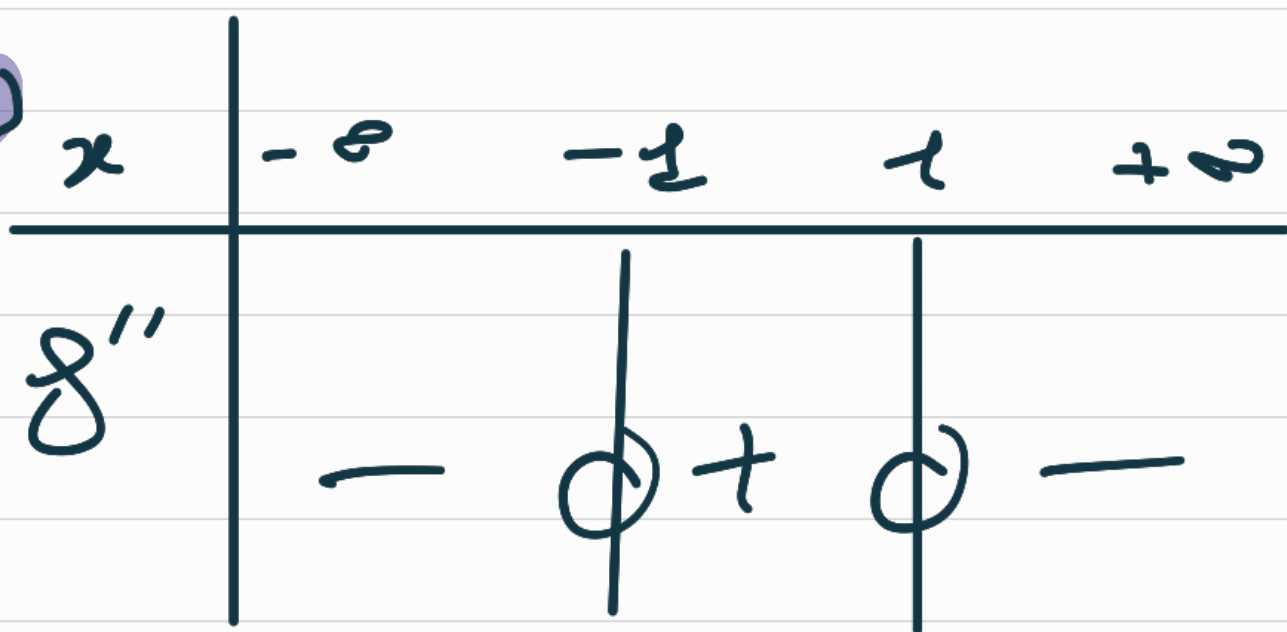
$$b) \Delta = b^2 - 4ac = 64 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2}{3}$$



5) a)



done δ

$$\begin{aligned}
 b) \quad y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\
 &= 2(x-1) + 5h(2) - 3 \\
 &= 2x - 2 + 5h(2) - 3 \\
 &= 2x + 5h(2) - 5.
 \end{aligned}$$

c) pour $x > 1$, f est concave

$$f(x) \leq 2x + 5h(2) - 5$$

$$5h(x^2+1) - 3x \leq 2x + 5h(2) - 5$$

$$5h(x^2+1) \leq 2x + 5h(2) - 5 + 3x$$

~~$$5h(x^2+1) \leq 5x + 5h(2) - 5$$~~

$$P_h(x^2+1) \leq x + P_h(2) - 1$$