

Exponentielle

- La fonction exponentielle est l'unique fonction f qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} f' = f \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \exp(x)$ ou e^x

- $(e^x)' = e^x$
- $e^x > 0$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- e^x est strict. croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\cdot e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$\cdot e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$\cdot \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$\cdot (e^a)^n = e^{a \times n}$$

$$\cdot e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$\cdot e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$$

$$\cdot (e^x)' = e^x$$

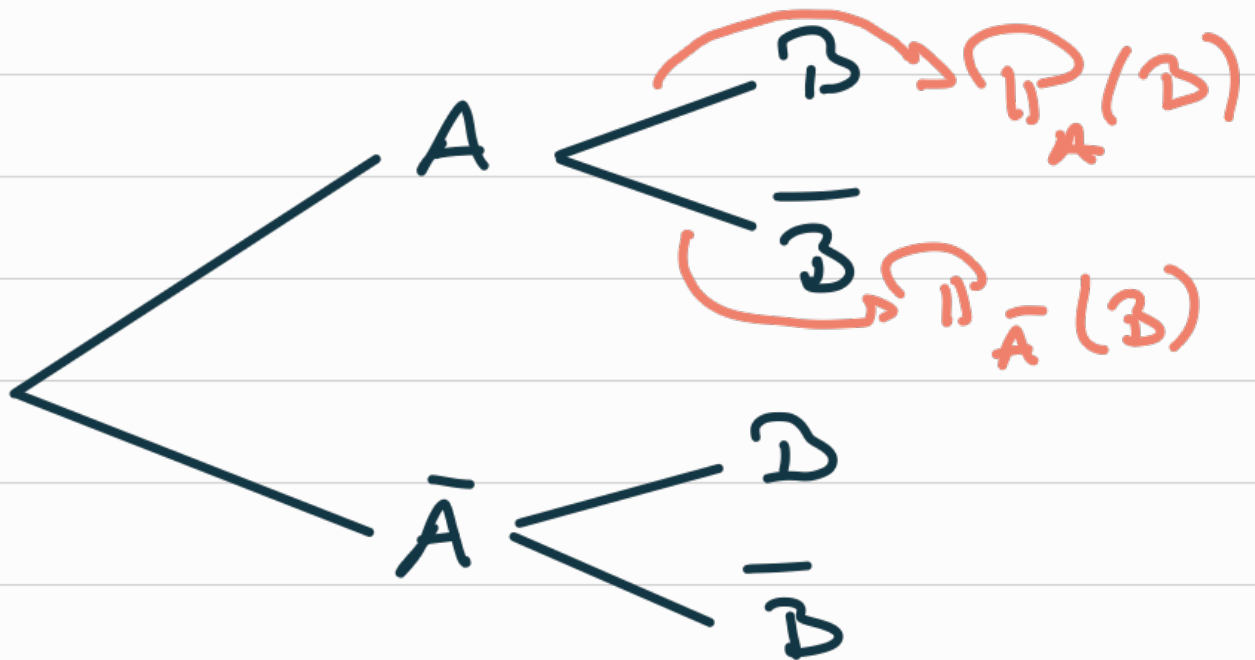
$$\cdot (e^{ax+b})' = a \times e^{ax+b}$$


$$(e^u)' = u' e^u$$

Règles conditionnelles

• $P(A) = \frac{\text{nb. issues } A}{\text{nb. issues totales.}}$

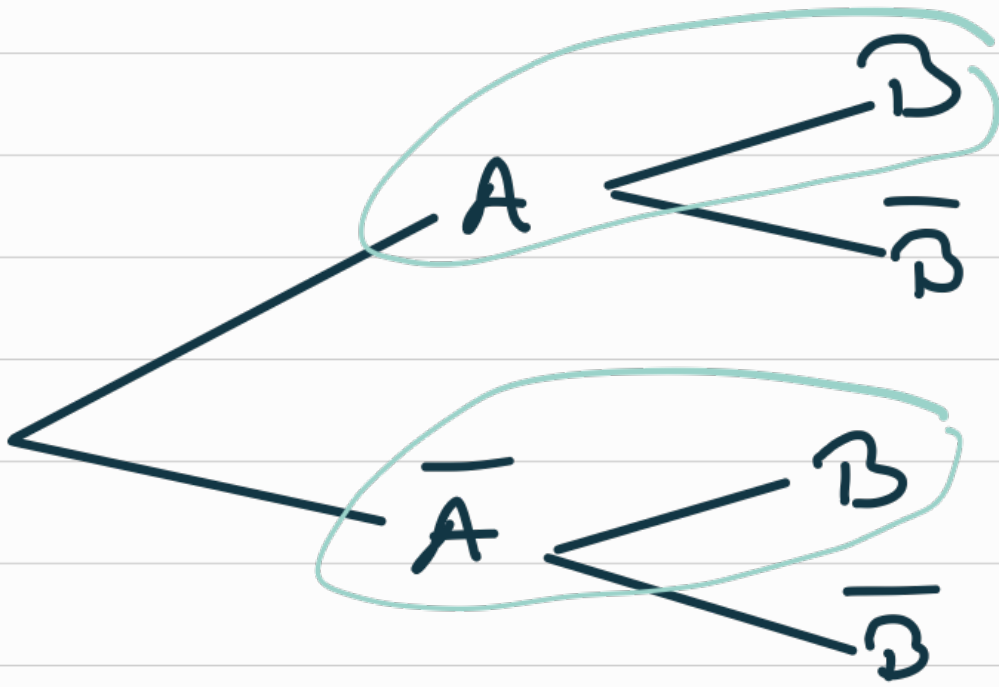
• Savoir construire un arbre.



• probabilités conditionnelles:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

• probabilités totales :



$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}) \end{aligned}$$

• notion d'indépendance :

deux événements A et B
sont dits indépendants

Ex: $\pi(A \cap B) = \pi(A) \times \pi(B)$

Ex: $\pi_A(B) = \pi(B)$

Variables aléatoires

- une v.a. X associe un nombre $\bar{a}$ chaque issue d'une expérience
- La loi de X sont les valeurs possibles et les probabilités associées à ses valeurs.

x_i	2	4	8
$P(X=x_i)$	.	.	.

- l'espérance = moyenne

$$E[X] = x_1 \times P(X=x_1) + \dots +$$

$$x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$$

• variance :

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\rightarrow E[X^2] = x_1^2 \times \mathbb{P}(X = x_1) + \dots + x_n^2 \times \mathbb{P}(X = x_n)$$

• écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\bullet E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$\bullet V(aX + b) = a^2 V(X)$$

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 (X points)

En 2020, une ville comptait 10 000 habitants.

On modélise l'évolution du nombre d'habitants de cette ville par la suite (u_n) définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,08u_n - 300, & n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 10\,000 \end{cases};$$

où u_n représente le nombre d'habitants pour l'année 2020+n.

1. Indiquer ce que représente u_1 et calculer sa valeur.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3750$.

- a. Déterminer v_0 .
- b. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a $v_{n+1} = 1,08v_n$.
- c. En déduire la nature de la suite (v_n) .
- d. Pour tout entier naturel n , exprimer, v_n en fonction de n .
- e. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_n = 6250 \times 1,08^n + 3750$.

$$u_n = v_n + 3750$$

3. Le tableau ci-contre, extrait d'une feuille automatisée de calcul, a été obtenue par recopie vers le bas après avoir saisi la formule suivante dans la cellule B2 :

$$= 6250 * 1,08^{A2} + 3750$$

La municipalité envisage d'ouvrir une nouvelle école maternelle dès que la population atteindra 19 000 habitants.

La construction d'un tel établissement nécessitant deux ans, déterminer l'année à partir de laquelle la construction de l'école doit commencer.

	A	B
1	n	Un
2	0	10000
3	1	10500
4	2	11040
5	3	11623,2
6	4	12253,056
7	5	12933,30048
8	6	13667,96452
9	7	14461,40168
10	8	15318,31381
11	9	16243,77892
12	10	17243,28123
13	11	18322,74373
14	12	19488,56323
15	13	20747,64829
16	14	22107,46015
17	15	23576,05696
18	16	25162,14152
19	17	26875,11284
20	18	28725,12187
21	19	30723,13162

Aide au calcul :

$$10\,000 - 3\,750 = 6\,250;$$

$$1,08 \times 4\,050 = 4\,374;$$

$$\frac{4\,050}{1,08} = 3\,750;$$

$$3\,750 \times 1,08 = 4\,050.$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad u_1 &= 1,08 \times \underline{10\,000} - 300 \\
 &= 10\,800 - 300 \\
 &= 10\,500.
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \hookrightarrow 1,08 \\
 \times 2,107 \\
 \hline
 756 \\
 + 0000 \\
 21600 \\
 \hline
 2,2356
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad a) \quad v_{n+1} &= 1,08 u_n - 4050 \\
 &= 1,08 \left(u_n - \frac{4050}{1,08} \right)
 \end{aligned}$$

$$= 1,08 (u_n - 3750)$$

$$= 1,08 v_n$$

Exercice 2 (X points)

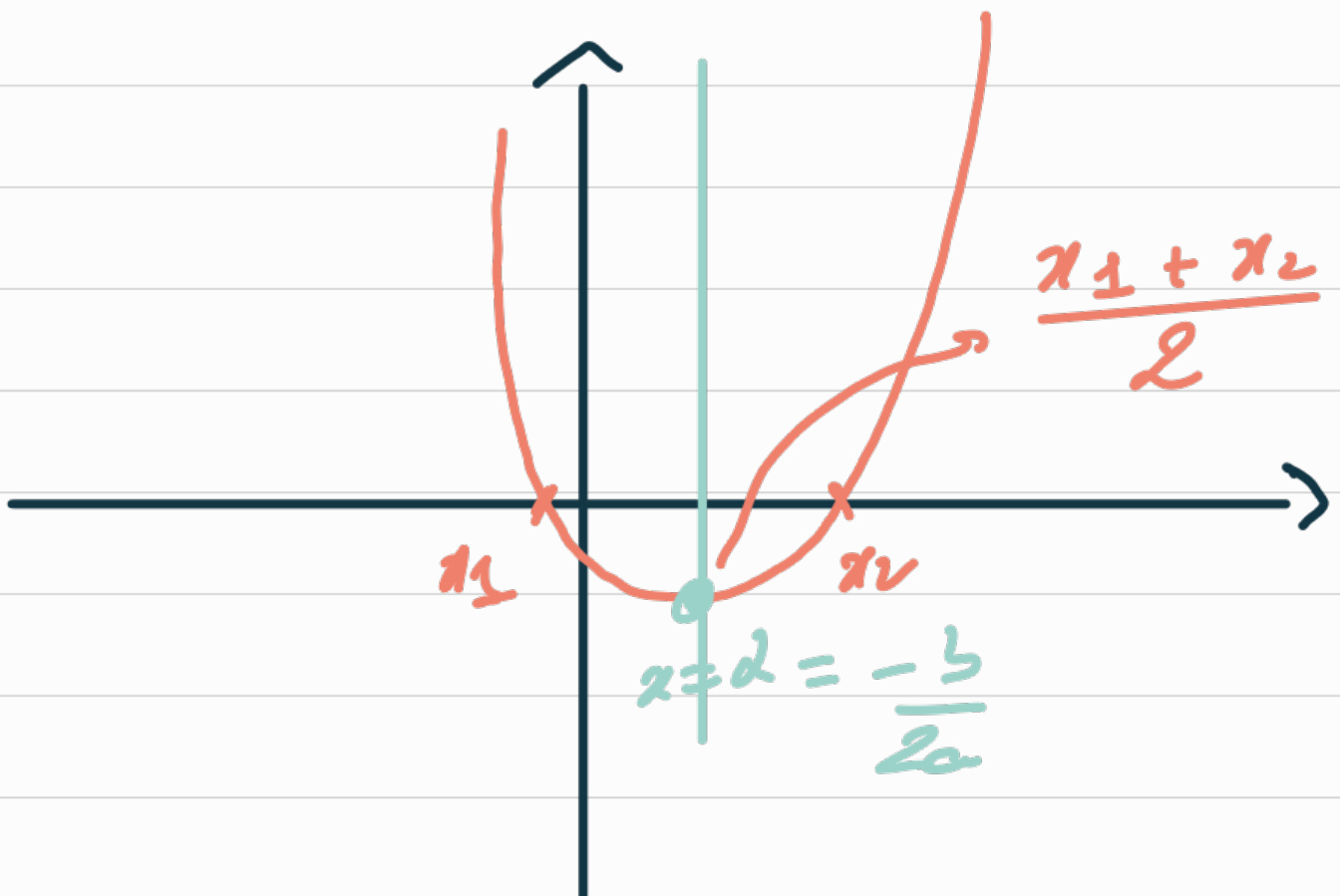
Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Partie A

On considère la fonction P définie sur l'intervalle $[-5 ; 3]$ par :

$$P(x) = 2x^2 + x - 10.$$

1. a. Déterminer les racines de P .
 b. En déduire l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = P(x)$.
2. Etablir le tableau de signe de la fonction P sur l'intervalle $[-5 ; 3]$.



x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
sign	+	$\emptyset$	-	+
$\mathcal{P}$				