

Partie 1:

$$\begin{aligned} 2) I_{n+1} &= \int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_u \underbrace{e^x}_{v'} dx \\ &= \left[ \underbrace{x^{n+1}}_u \underbrace{x}_v e^x \right]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 \underbrace{(n+1)x^n}_{u'} \underbrace{e^x}_v dx \end{aligned}$$

$$= (1^{n+1} \times e) - (0^{n+1} \times e^0)$$

$$- (n+1) \underbrace{\int_0^1 x^n e^x dx}_{I_n}$$

$$= e - (n+1) I_n.$$

$$3) I_{n+1} = e - (n+1) I_n$$



$$I_2 = e - 2 I_1$$

$$= e - 2 \times 1$$

$$= e - 2.$$

$$I_1 = \int_0^1 x e^x dx$$

$$= \left[ (x-1) e^x \right]_0^1$$

$$= 1$$

## Partie 2 :

1) a)  $I_n$  est l'aire sous l'entre la courbe  $C_n$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ .

b) On peut conjecturer que la limite de  $I_n$  est 0.

2)  $\forall x \in [0; 1]$ ,

$$0 \leq x \leq 1$$

$$1 = e^0 \leq e^x \leq e$$

$$0 \leq x^n e^x \leq e x^n$$

donc :

$$0 \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 e x^n dx$$

$$0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$$

$$\textcircled{3) \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1} \\ = \frac{1}{n+1}$$

donc :

$$0 \leq I_n \leq e \times \frac{1}{n+1}$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

donc d'après le théorème

# des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x(\ln(x))^2$ .  
On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .  $\rightarrow +\infty$

2. Pour tout réel  $x > 0$ , on pose  $g(x) = x \ln(x)$ .

a. Démontrer que pour tout réel  $x > 0$ , on a  $f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$ .  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  par c.c

b. En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

a. Démontrer que sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = (\ln(x))(2 + \ln(x))$ .

b. En déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; 1]$ .

4. On considère l'équation  $f(x) = 2$ .

a. Justifier que, sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , cette équation admet une unique solution. On note  $\alpha$  cette solution.

b. Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0, 1.

5. Soit  $a$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0; 1]$ .

a. Donner une interprétation géométrique de  $\int_a^1 f(x) dx$ .

b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 - \int_a^1 x \ln(x) dx$$

c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 + \frac{a^2}{2} \ln(a) + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

d. Déterminer la limite de  $\int_a^1 f(x) dx$  quand  $a$  tend vers 0.

$$\begin{aligned} u' &= 1 \\ v' &= 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ g'(x) &= 1 \times \ln(x) + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= \ln(x) (2 + \ln(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(x) &> -2 \\ x &> e^{-2} \end{aligned}$$

| $x$          | 0 | $e^{-2}$ | 1 | $+\infty$             |
|--------------|---|----------|---|-----------------------|
| $\ln(x)$     |   | -        | 0 | +                     |
| $2 + \ln(x)$ |   | -        | + | +                     |
| $f'$         |   | +        | - | +                     |
| $f$          | 0 | 0,5      | 0 | $\rightarrow +\infty$ |

