

Exercice 1 (6 points)

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

- 25% des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15% ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- 45% des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 30% des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 12% des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

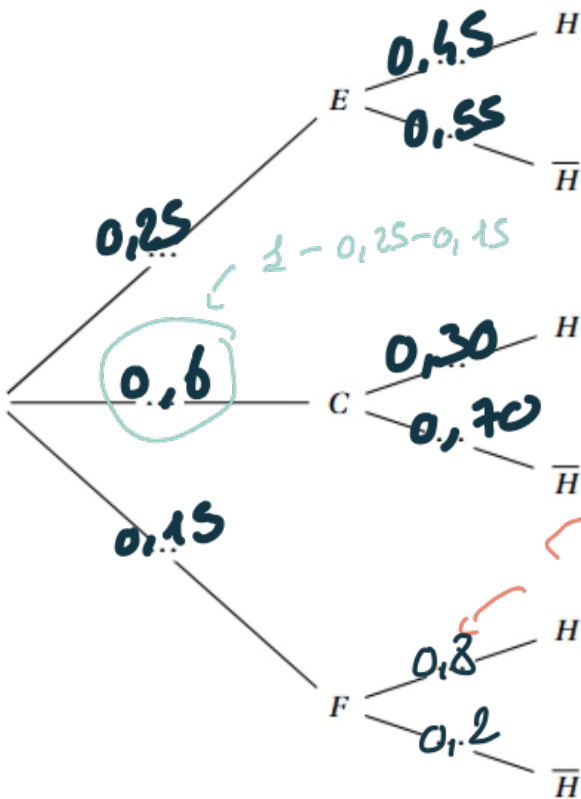
On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les événements suivants : [Sujets Bac corrigés](#)

- E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

$P(F \cap H) = 0,12$

Partie A

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



$P_F(H) = \frac{P(F \cap H)}{P(F)}$

$= \frac{0,12}{0,15} = 0,8$

$P_F(H) = ?$

1. Calculer la valeur exacte de $P(E \cap H)$.
2. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.
3. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». On arrondira le résultat au millième.

$$\begin{aligned}
 1) \quad P(E \cap H) &= P(E) \times P_E(H) \\
 &= 0,25 \times 0,45 \\
 &= 0,1125
 \end{aligned}$$

2) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(H) &= P(E \cap H) + P(C \cap H) \\
 &\quad + P(F \cap H) \\
 &= 0,1125 + 0,6 \times 0,30 + 0,12 \\
 &= 0,4125.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad P_H(E) &= \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0,1125}{0,4125} \\
 &\approx 0,2727
 \end{aligned}$$

Partie B

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise. On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ». [Cours en ligne](#)

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». *On arrondira le résultat au millième.*
3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul. On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise. On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».
 - a. Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $q_n = 1 - 0,5875^n$.
 - b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9%.

$$1) X \hookrightarrow \mathcal{B}(8; 0,4125).$$

$$2) \mathbb{P}(X=0) = (1 - 0,4125)^8 \\ \approx 0,042$$

au moins : $X \geq$
au plus : $X \leq$
exactement : $X =$

$$\begin{aligned}
 3) \quad a) \quad q_n &= P(X \geq 1) \\
 &= 1 - P(X = 0) \\
 &= 1 - (1 - 0,4125)^n
 \end{aligned}$$

$$P(X = 0) = (1 - p)^n$$

$$= 1 - 0,5875^n$$

$$b) \quad P(X \geq 1) > 0,999$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,5875^n > 0,999$$

$$\Leftrightarrow -0,5875^n > 0,999 - 1$$

$$\Leftrightarrow -0,5875^n > -0,001$$

$$\Leftrightarrow 0,5875^n \leq 0,001$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,5875) \leq \ln(0,001)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)}$$

$$\approx 12,9875$$

done

$$n = 13$$

Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;
- Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;
- Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;
- Option « Écoute hors-ligne » : 2 € de plus par mois quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné. [Logiciel de simulation](#)

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y .
2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .
3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut 10,475 et interpréter ce résultat dans le contexte.
4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y , arrondie au centième.
5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.
On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.
 - a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z .
 - b. Un responsable affirme que si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50% de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.
Justifier cette affirmation.

1) Les valeurs prises par Y sont $\{5; 10; 16; 7; 12; 18\}$.

$$2) P(Y=5) = P(E \cap \bar{H}) = 0,1575$$

$$P(Y=10) = P(C \cap \bar{H}) = 0,42$$

$$P(Y=16) = P(F \cap \bar{H}) = 0,03$$

$$P(Y=7) = P(E \cap H) = 0,1125$$

$$P(Y=12) = P(C \cap H) = 0,12$$

$$P(Y=18) = P(F \cap H) = 0,12$$

y_i	5	10	16	7	12	18
$P(Y=y_i)$	0,1375	0,42	0,03	0,1125	0,12	0,12

= 1

$$3) E[X] = 5 \times 0,1375 + 10 \times 0,42 + \dots + 18 \times 0,12$$

$$= 10,475.$$

En moyenne, un abonné paye

par mois 10,475 €.