

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Partie A

On considère la fonction P définie sur l'intervalle $[-5 ; 3]$ par :

$$P(x) = 2x^2 + x - 10.$$

1. a. Déterminer les racines de P .

b. En déduire l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = P(x)$.

2. Etablir le tableau de signe de la fonction P sur l'intervalle $[-5 ; 3]$.

$$\begin{aligned} 1) \text{ a) } \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 2 \times -10 \\ &= 1 + 80 \\ &= 81 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 9}{2 \times 2} = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 9}{2 \times 2} = 2$$

b) . l'axe de symétrie
est la droite d'équation
 $x = 2$
 $-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2}{2} &= \frac{-\frac{5}{2} + 2}{2} \\ &= \frac{\frac{-5 + 4}{2}}{2} \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

donc l'axe de symétrie
est la droite $x = -\frac{1}{4}$.

2)

x	-5	$-\frac{5}{2}$	2	3
signe	+	0	-	+

3. On sait que la fonction f a pour expression sur l'intervalle $[-5; 3]$

$$f(x) = (4x^2 - 14x + 8)e^{0,5x}.$$

Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5; 3]$, on a

$$f'(x) = P(x)e^{0,5x}.$$

4. En utilisant les résultats de la **partie A**, dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-5; 3]$. (Il n'est pas demandé de calculer les images).

$$f'(x) = (2x^2 + x - 10)e^{0,5x} > 0$$

x	-5	$-\frac{5}{2}$	2	3
f'	+	0	-	+
f				

1. On considère la fonction g définie sur $[-0,5 ; +\infty[$ par

$$g(x) = e^x - x + \frac{1}{2}.$$

(a) Calculer la dérivée de la fonction g .

(b) Étudier les variations de la fonction g sur $[-0,5 ; +\infty[$.

On dressera le tableau de variations de g .

(c) Démontrer que g est positive pour tout $x \in [-0,5 ; +\infty[$.

2. On considère la fonction f définie sur $[-0,5 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x.$$

On admet que pour tout réel x de cet intervalle :

$$f'(x) = 1 + \left(\frac{1}{2} - x\right) e^{-x}.$$

(a) Vérifier que $f'(x) = e^{-x} g(x)$.

(b) En déduire les variations de la fonction f sur $[-0,5 ; +\infty[$.

3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

1) a) $g'(x) = e^x - 1$

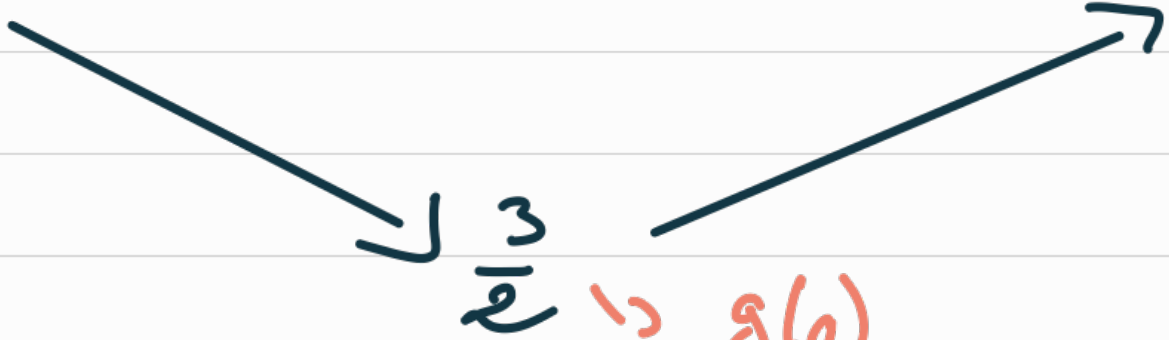
b) $e^x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow e^x > 1 \quad \Leftrightarrow e^x > e^0$

$$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$$

$$\Leftrightarrow e^x > e^0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

x	$-0,5$	0	$+\infty$
g'	—	0	+
g	 $\frac{3}{2} \hookrightarrow g(0)$		

$$\begin{aligned}
 g(0) &= e^0 - 0 + \frac{1}{2} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

c) g admet pour minimum $\frac{3}{2} > 0$ sur $[-0,5; +\infty[$.

donc g est positive sur $[-0,5; +\infty[$.

2) a) $e^{-x} g(x)$

$$= e^{-x} \left(e^x - x + \frac{1}{2} \right)$$

$$= e^{-x} \times e^x - x e^{-x} + e^{-x} \times \frac{1}{2}$$

$$= e^{-x+x} - x e^{-x} + e^{-x} \times \frac{1}{2}$$

$$= e^0 - x e^{-x} + e^{-x} \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2} - x \right) e^{-x} = f'(x).$$

$$b) f'(x) = e^{-x} g(x)$$

or $e^{-x} > 0$ et g est positive sur $[-0,5; +\infty[$.

donc f' est positive sur $[-0,5; +\infty[$ et donc f est croissante sur $[-0,5; +\infty[$.

$$3) y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f'(0) = e^{-0} \times g(0) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \left(0 + \frac{1}{2}\right) e^{-0} + 0$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 + 0$$

$$= 1/2$$

done :

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$