

Exercice 1 (6 points)

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

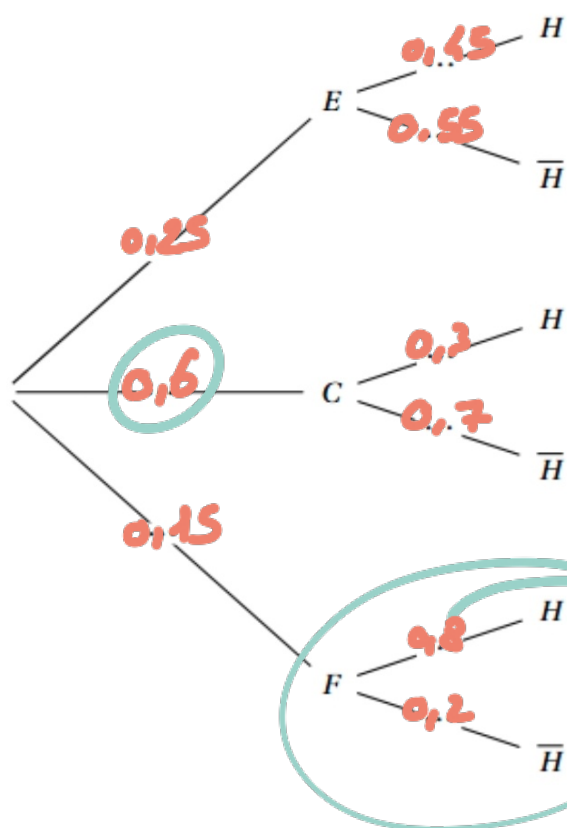
- 25% des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15% ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- 45% des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 30% des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 12% des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les événements suivants :

- E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

Partie A

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



$$P(F \cap H) = 0,12$$

$$P_F(H) = \frac{P(F \cap H)}{P(F)} = \frac{0,12}{0,15}$$

1. Calculer la valeur exacte de $P(E \cap H)$.

2. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

3. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». On arrondira le résultat au millième.

Partie B

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise. On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». On arrondira le résultat au millième.
3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul. On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise. On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».
 - a. Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $q_n = 1 - 0,5875^n$.
 - b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9%.

$$\begin{aligned} 3) a) \quad q_n &= \mathbb{P}(X \geq 1) \quad \checkmark (1-p)^n \\ &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) \\ &= 1 - (1 - 0,4125)^n \\ &= 1 - (0,5875)^n \end{aligned}$$

$$b) \quad \mathbb{P}(X \geq 1) \geq 0,999$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,5875^n \geq 0,999$$

$$\Leftrightarrow -0,5875^n \geq 0,999 - 1$$

$$\Leftrightarrow -0,5875^n > -0,001$$

$$\Leftrightarrow 0,5875^n \leq 0,001$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,5875) \leq \ln(0,001)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)}$$

$$\approx 12,9875$$

done

$$n = 13$$

Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;
- Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;
- Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;
- Option « Écoute hors-ligne » : 2 € de plus par mois quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y .
2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .
3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut 10,475 et interpréter ce résultat dans le contexte.
4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y , arrondie au centième.
5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.
On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z .

b. Un responsable affirme que si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50% de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.
Justifier cette affirmation.

$$1) \{5; 7; 10; 12; 16; 18\}$$

$$\begin{aligned} 2) P(Y=5) &= P(E \cap H) \\ &= 0,25 \times 0,55 \\ &= 0,1375 \end{aligned}$$

$$P(Y=7) = P(E \cap H) = 0,1125$$

y_i :	5	7	10	12	16	18
$P(Y=y_i)$	0,1375	0,1125	0,42	0,18	0,03	0,12

$$= 1$$

$$\begin{aligned}
 3) E[Y] &= 5 \times 0,1375 + 7 \times 0,1125 \\
 &\quad + 10 \times 0,42 + 12 \times 0,18 + 16 \times 0,03 \\
 &\quad + 18 \times 0,12 \\
 &= 10,475
 \end{aligned}$$

En moyenne, un abonné va payer par mois 10,475 €.

$$4) V(Y) = E[Y^2] - \underbrace{E[Y]^2}_{(-0,475)^2}$$

$$E[Y^2] = 5^2 \times 0,1375 + 7^2 \times 0,1125 + 10^2 \times 0,42 + 12^2 \times 0,18 + 16^2 \times 0,03 + 18^2 \times 0,12$$

$$V(Y) \approx 13,70.$$

$$5) a) \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$V(X) = \sigma(X)^2$$

$$V(Z) = \sigma(Z)^2 = 2^2 = 4$$

$$\hookrightarrow \mathbb{P}(6 < Z < 12)$$

$$= \mathbb{P}(6 - 9 < Z - 9 < 12 - 9)$$

$$\downarrow \\ E[Z]$$

$$= \mathbb{P}(-3 < Z - 9 < 3)$$

$$= \mathbb{P}(|Z - 9| < 3)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|Z - 9| \geq 3)$$

or d'après l'inégalité
de Bienyamé-Tchebychev

$$\mathbb{P}(|Z - E[Z]| \geq a) \leq \frac{V(Z)}{a^2}$$

$$\text{on a: } \mathbb{P}(|Z - 9| \geq 3) \leq \frac{V(Z)}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$\text{d'où } \mathbb{P}(|Z - 9| \geq 3) \leq \frac{4}{9}$$

$$P(6 < Z < 12) > 1 - \frac{4}{9}$$

$$> \frac{5}{9} \approx 0,56$$