

$$4) P(S) = P(F \cap S) + P(\bar{F} \cap S)$$

$$= 0,931 + (1-0,2) \times 0,05$$

$$= 0,97$$

$$P(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0,01$$

$$P(\bar{F} \cap \bar{S}) = P_{\bar{F}}(\bar{S}) \times P(\bar{F})$$

$$0,01 = P_{\bar{F}}(\bar{S}) \times 0,05$$

$$\Rightarrow P_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{0,01}{0,05} = 0,2$$

$$E[ax+b] = a E[X] + b$$

$$V[ax+b] = a^2 V(X)$$

$$3) a) V(F_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n^2} V(S_n)$$

$$= \frac{0,0475n}{n^2}$$

$$= \frac{0,0475}{n}$$

$$b) \mathbb{P}(0,93 < F_n < 0,97) \geq 0,96$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(0,93 - 0,95 < F_n - 0,95 < 0,97 - 0,95) \geq 0,96$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(-0,02 < F_n - 0,95 < 0,02) \geq 0,96$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|F_n - 0,95| < 0,02) \geq 0,96$$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \geq 0,96$$

$$\Leftrightarrow -\mathbb{P}(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \geq -0,04$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \leq 0,04$$

or d'après l'inégalité de
 B-T on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(|F_n - 0,95| > 0,02) &\leq \frac{V(F_n)}{(0,02)^2} \\
 &= \frac{0,0475}{n \times 0,0004} \\
 &= \frac{118,75}{n}
 \end{aligned}$$

d'aut :

$$\frac{118,75}{n} \leq 0,01$$


$$(\Rightarrow) n > \frac{118,75}{0,01}$$

$$\approx 2968,75$$

donc $n = 2969$.

exercice 4 :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x))^2 = +\infty$

et par produit on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} 2) & \quad 4 (g(\sqrt{x}))^2 \\ &= 4 (\sqrt{x} f(\sqrt{x}))^2 \\ &= 4 (\sqrt{x})^2 (f(\sqrt{x}))^2 \end{aligned}$$

$$= 4x \left(\frac{1}{2} \ln(x) \right)^2$$

$$= \cancel{4}x \times \frac{\cancel{1}}{\cancel{4}} (\ln(x))^2$$

$$= x (\ln(x))^2$$

$$= f(x)$$

b) $f(x) = 4(g(\sqrt{x}))^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \quad \text{par covariance, comparée}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

donc par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g(\sqrt{x}))^2 = 0$$

et donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

3) a) $f(x) = \underbrace{x}_{u} (\underbrace{P_n(x)}_{v})^2$

$u' = 1$ $v = w^2$
 $v' = 2x P_n(x) \times \frac{1}{x}$

$$(x^2)' = 2x \quad / \quad (u^2)' = 2u \times u'$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (P_n(x))^2 + \cancel{x} \times 2 P_n(x) \times \frac{1}{\cancel{x}} \\ &= P_n(x)^2 + 2 P_n(x) \\ &= P_n(x) (P_n(x) + 2). \end{aligned}$$

b) $f'(x) = \underline{\ln(x)} \cdot \underline{(2 + \ln(x))}$.

$\hookrightarrow 2 + \ln(x) > 0$
 $\hookrightarrow \ln(x) > -2$
 $\hookrightarrow x > e^{-2}$

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$
$\ln(x)$		0	0	+
$2 + \ln(x)$	-	0	+	
f'	+	0	-	+
f		$0,54 = 4e^{-4}$	0	$+\infty$

c)

4) a) f est continue sur $[-1; +\infty[$.

f est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$

$$f(-1) = 0 < 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 2$$

donc d'après le corollaire
du théorème des valeurs
intermédiaires l'équation $f(x) = 2$
admet une unique solution α
sur $[-1; +\infty[$.

De plus, sur $]0; 1]$, $f(x) < 2$
donc l'équation $f(x) = 2$ admet
une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

$$b) \alpha \in [2,4; 2,5]$$

5) a) l'aire entre la courbe g et l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=1$.

$$b) \int_a^1 g(x) dx$$

$$= \int_a^1 \sqrt{x} (P_n(x))^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} (P_n(x))^2 \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} x^{\frac{1}{2}} P_n(x) \frac{1}{x} dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^{\overset{=0}{2}} (P_n(1))^2 - \frac{a^2}{2} (P_n(a))^2 \right) - \int_a^1 x P_n(x) dx$$

$$= -\frac{a^2}{2} (P_n(a))^2 - \underbrace{\int_a^1 \underbrace{x}_{u'} \underbrace{P_n(x)}_v dx}_{\text{I.P.P}}$$

c)