

$$f(x) = x(\ln(x))^2, \quad x > 0$$

5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.

a. Donner une interprétation géométrique de $\int_a^1 f(x) dx$.

b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln(a))^2 - \int_a^1 x \ln(x) dx$$

c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln(a))^2 + \frac{a^2}{2}\ln(a) + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

d. Déterminer la limite de $\int_a^1 f(x) dx$ quand a tend vers 0.

b) $\int_a^1 f(x) dx$

$$= \int_a^1 x (\ln(x))^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} (\ln(x))^2 \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \times 2 \ln(x) \times \frac{1}{x} dx$$

$$= \left(\cancel{\frac{1}{2} \times h(1)}^2 - \frac{a^2}{2} (h(a))^2 \right) - \int_a^1 x h(x) dx$$

$$= -\frac{a^2}{2} (h(a))^2 - \int_a^1 x h(x) dx$$

c) $\int_a^1 x h(x) dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \times h(x) \right]_a^1 - \int_a^1 \cancel{\frac{x^2}{2}} \times \cancel{\frac{1}{x}} dx$$

$$= \left(\cancel{\frac{1}{2} h(1)} - \frac{a^2}{2} h(a) \right) - \frac{1}{2} \int_a^1 x dx$$

$\frac{1}{2} = 0$

$$= -\frac{a^2}{2} h(a) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^1$$

$$= -\frac{a^2}{2} \ln(a) - \frac{1}{2} \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right)$$

$$= -\frac{a^2}{2} \ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}.$$

done:

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 - \int_a^1 x \ln(x) dx$$

$$= -\frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 - \left(-\frac{a^2}{2} \ln(a) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} + \frac{0^2}{2} \right)$$

$$= -\frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 + \frac{a^2}{2} \ln(a) \\ + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

3. On souhaite déterminer la glycémie moyenne en $g \cdot l^{-1}$ chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$[0; 6]$ par :

$$f(t) = (t+1)e^{-0,4t}$$

$$\int_0^6 f(t) dt = -23,75e^{-2,4} + 8,75$$

$$\int_0^6 (t+1)e^{-0,4t} dt$$

$$= \left[(t+1) \times \frac{e^{-0,4t}}{-0,4} \right]_0^6 - \int_0^6 \frac{e^{-0,4t}}{-0,4} dt$$

$$= \left(7 \frac{e^{-0,4 \times 6}}{-0,4} - 1 \times \frac{e^{-0,4 \times 0}}{-0,4} \right)$$

$$- \left[\frac{e^{-0,4t}}{-0,4 \times -0,4} \right]_0^6$$

$$= 2,5 - 17,5 e^{-2,4}$$

$$- \left(\frac{e^{-0,4 \times 6}}{0,16} - \frac{e^0}{0,16} \right)$$

$$= 2,5 - 17,5e^{-2,4} - 6,25e^{-2,4} + 6,25$$

$$= -23,75e^{-2,4} + 8,75.$$