

Amérique Nord 2

exercice 2 :

$$2) a) f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$u(x) = 2x$$

$$u'(x) = 2$$

$$v(x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$v'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - 2x \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{1+x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{1+x^2})^2 - 2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{2(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{2 + \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{2 > 0}{\underbrace{(1+x^2)}_{> 0} \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{> 0}}$$

b) on a $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie 3:

1) $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(\sqrt{3})$$

car f
est stric.
croissante

$$1 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \sqrt{3}$$

2) (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$, donc (u_n) converge vers ℓ

. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

donc $\ell \in \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$

or $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$

done $\underline{P = \sqrt{3}}$

3) a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}^2}$

or $u_{n+1}^2 = \left(f(u_n) \right)^2 = \frac{4u_n^2}{1 + u_n^2}$

$$= \frac{\frac{4u_n^2}{1 + u_n^2}}{3 - \frac{4u_n^2}{1 + u_n^2}}$$

$$= \frac{\frac{4u_n^2}{1 + u_n^2}}{\frac{3 + 3u_n^2 - 4u_n^2}{1 + u_n^2}}$$

$$= \frac{4u_n^2}{\cancel{1+u_n^2}} \times \frac{\cancel{1+u_n^2}}{3-u_n^2}$$

$$= \frac{4u_n^2}{3-u_n^2}$$

$$= 4 \times u_n$$

donc (v_n) est géométrique de
raison 4 et de premier terme

$$v_0 = \frac{u_0^2}{3-u_0^2} = \frac{1^2}{3-1^2} = \frac{1}{2}.$$