

Topologie

Fuente 1:

4) $\circ$ si $(x, y) = (0, 0)$,
alors
$$\|(x, y)\| = |x + 2y| + 3|y|$$

$$= |0 + 2 \times 0| + 3 \times 0 = 0$$

$\circ$ si $\|(x, y)\| = 0$, alors on a:

$$\underbrace{|x + 2y|}_{\geq 0} + \underbrace{3|y|}_{\geq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x + 2y| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3|y| = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

donc $(x, y) = (0, 0)$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\|\lambda(x, y)\| = \|(\lambda x, \lambda y)\|$$

$$= |\lambda x + 2\lambda y| + 3|\lambda y|$$

$$= |\lambda| |x + 2y| + 3|\lambda| |y|$$

$$= |\lambda| (|x + 2y| + 3|y|)$$

$$= |\lambda| \|(x, y)\|$$

• Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|$$

$$= \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\|$$

$$= |x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2)| + 3|y_1 + y_2|$$

$$= |\underbrace{x_1 + 2y_1}_x + \underbrace{x_2 + 2y_2}_y| + 3|y_1 + y_2|$$

$$\leq |x_1 + 2y_1| + |x_2 + 2y_2| + 3|y_1| + 3|y_2|$$

$$\leq (|x_1 + 2y_1| + 3|y_1|) + (|x_2 + 2y_2| + 3|y_2|)$$

$$\leq \|(x_1, y_1)\| + \|(x_2, y_2)\|$$

• Feuille 2 :

exercice 2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x-1| < 1\}$$

on pose $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(x, y) \mapsto |x-1|$,

qui est continue sur $\mathbb{R}^2$

De plus, $A = f^{-1}(]0; 1[)$
avec $]0; 1[$ ouvert de $\mathbb{R}$.

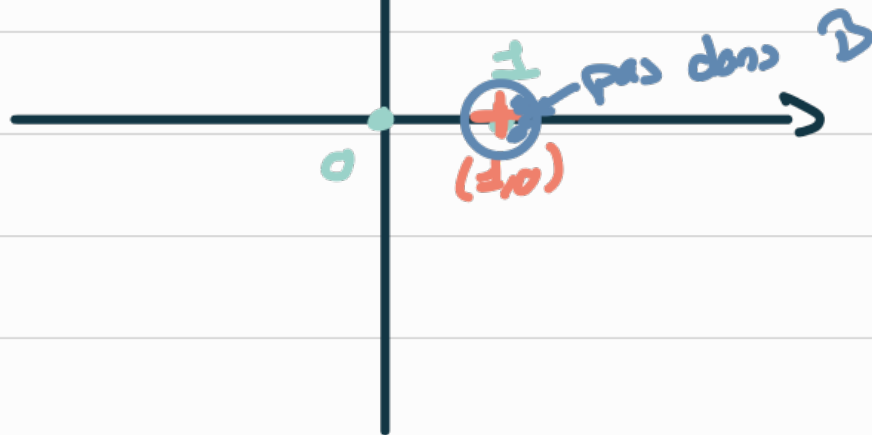
Donc A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
comme image réciproque d'un
ouvert de $\mathbb{R}$ par une application
continue.

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1 \}.$$

* montrons B n'est pas ouvert.

A ouvert si $\forall x \in A, \exists \epsilon > 0,$
 $D(x, \epsilon) \subset A$

on prend le point $(1; 0) \in B$
 toute boule $D((1, 0), \epsilon), \epsilon > 0$
 contiendra des points qui ne seront
 pas dans B .



donc B n'est pas un ouvert
 de $\mathbb{R}^2$.

* montrons que $\mathcal{B}$ n'est pas un fermé.

A fermé si $\forall x \in A, \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$
telle que $(x_n) \text{ CV vers } x$.

on pose $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n} ; \frac{1}{n} \right)$
pour $n \geq 1$.

on a bien $0 < x_n = \frac{1}{n} \leq 1$

donc $(x_n, y_n) \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$.

or $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0) \notin \mathcal{B}$

donc $\mathcal{B}$ n'est pas un fermé
de $\mathbb{R}^2$.