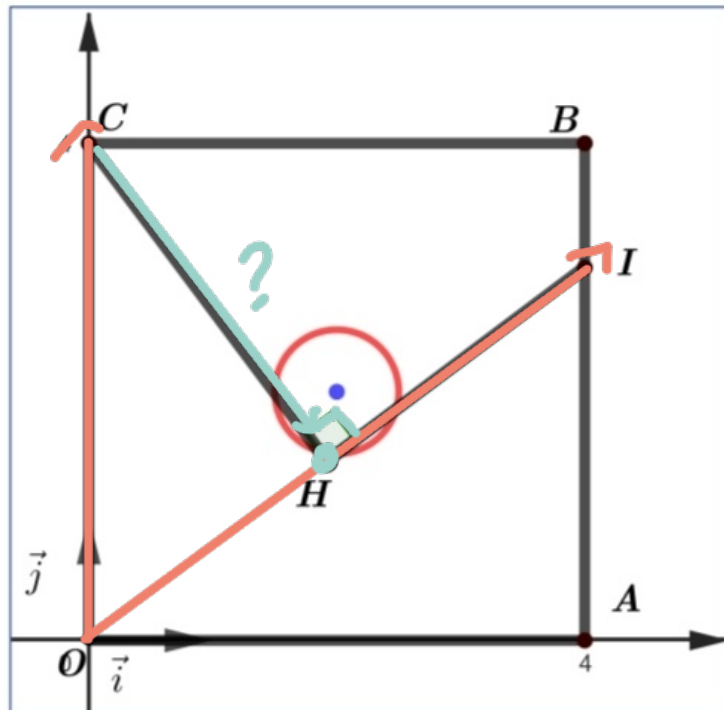


Exercice 1 (X points)

On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



On dispose des données suivantes :

- Le quadrilatère $OABC$ est un carré de côté 4 ;
- On a $A(4; 0), B(4; 4), C(0; 4), I(4; 3)$;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI) ;
- On note $\mathcal{E}$ le cercle de centre $D(2; 2)$ et de rayon 0,5.

1.a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OC}$.

b. En déduire le produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OC}$.

2. a. Exprimer le produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OC}$ en fonction des longueurs OH et OI .

b. Calculer la longueur OI .

c. En déduire que $OH = 2,4$.

3. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CH) .

b. Justifier qu'une équation du cercle $\mathcal{E}$ est :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0.$$

c. Le point $M(1,5; 2)$ appartient-il à l'intersection du cercle $\mathcal{E}$ et de la droite (CH) ? Justifier.

Aide au calcul.

$$0,5^2 = 0,25$$

$$1,5^2 = 2,25$$

$$2,5^2 = 6,25$$

$$5 \times 2,4 = 12$$

$$\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$\begin{aligned} 1) a) & \quad \overline{OI}(4;3) \quad I(4;3) \\ \Rightarrow & \quad \overline{OI}(\underline{4};\underline{3}) \quad | \quad C(0;4) \\ \Rightarrow & \quad \overline{OC}(\underline{0};\underline{4}) \end{aligned}$$

$$b) \quad \overline{OI} \cdot \overline{OC} = 4 \times 0 + 3 \times 4 = 12$$

$$\vec{u}(x; y) \quad \vec{v}(x'; y')$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

$$\begin{aligned} 2) a) \quad \overline{OI} \cdot \overline{OC} &= \overline{OI} \cdot \overline{OH} \\ &= OI \times OH \end{aligned}$$

b)

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$OI = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

c)

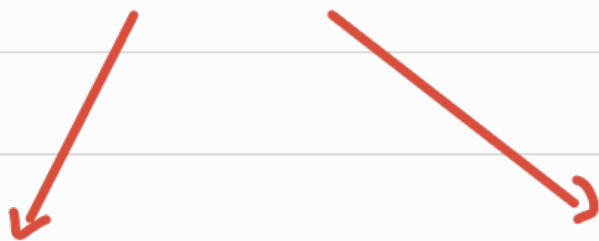
$$\vec{OI} \cdot \vec{OC} = OI \times OH$$

$$12 = 5 \times OH$$

$$\text{dnc } OH = \frac{12}{5}$$

3)

Equation cartésienne



- point
- vecteur directeur

- point
- vecteur normal



a) $\vec{OI}(4;3)$ est normal
à la droite (CH).



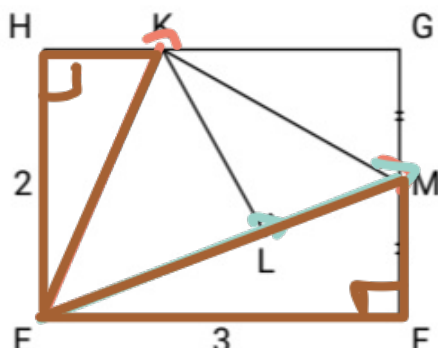
Exercice 3 (~6 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

$EFGH$ est un rectangle avec $EH = 2$ et $EF = 3$. M est le milieu de $[FG]$ et K est défini par $\vec{HK} = \frac{1}{3}\vec{HG}$.

L est le projeté orthogonal de K sur la droite (EM) .



1. Montrer que $\vec{EK} \cdot \vec{EM} = 5$. On pourra s'aider de la relation de Chasles.
2. En écrivant le produit scalaire de $\vec{EK} \cdot \vec{EM}$ de deux manières différentes, déterminer :
 - (a) La longueur EL .
 - (b) Une mesure de l'angle $\widehat{KEM}$.

$$1) \vec{EK} \cdot \vec{EM}$$

$$= (\vec{EH} + \vec{HK}) \cdot (\vec{EF} + \vec{FM})$$

$$= \vec{EH} \cdot \vec{EF} + \vec{EH} \cdot \vec{FM} + \vec{HK} \cdot \vec{EF} + \vec{HK} \cdot \vec{FM}$$

$$= 0 + EH \times FM + HK \times EF + 0$$

$$= 0 + 2 \times 1 + 1 \times 3 + 0$$

$$= 2 + 3$$

$$= 5$$

2) a) $\vec{EK} \cdot \vec{EM} = \vec{EL} \cdot \vec{EM}$

$$= \underline{EL} \times EM$$

d'où $5 = EL \times EM$

↪ D'après le théorème de Pythagore on a :

$$EM^2 = EF^2 + FM^2$$

$$= 3^2 + 1^2 = 10$$

done $EN = \sqrt{10}$

also :

$$S = EN \times \sqrt{10}$$

done $EN = \frac{S}{\sqrt{10}}$

b) $\vec{EK} \cdot \vec{EN} = EK \times \underbrace{EN}_{\sqrt{10}} \times \cos(\widehat{KEN})$

Pythagore : $EK^2 = EN^2 + NK^2$

$$= 2^2 + 1^2 = 5$$

done $EK = \sqrt{5}$

donc : $S = \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \cos(\widehat{KEH})$

$$\frac{S}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \cos(\widehat{KEH})$$

d'où $\widehat{KEH} = \arccos\left(\frac{S}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}\right) = 45^\circ$