

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(4; 2; 2)$, $B(5; -2; 3)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ .

1. Vérifier que la droite Δ passe par le point $C(1; 1; 1)$ mais pas par le point A .

2. a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x + y + 2z - 14 = 0$.

b. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ passe par le point B mais pas par le point C .

3. On considère le point $D(3; 2; 3)$.

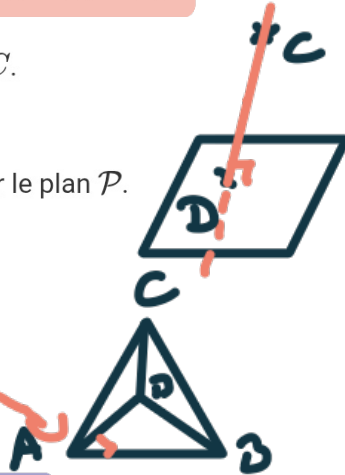
a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.

b. Justifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

c. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$. $= 0$

d. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.



4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .

a. Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29}\right)$.

b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.

c. En déduire la distance du point D au plan (ABC) .

$$1) \quad 1 = 1 + 2t \Rightarrow t = 0$$

$$1 = 1 + t \Rightarrow t = 0$$

$$1 = 1 + 2t \Rightarrow t = 0$$

$$\text{donc } C(1; 1; 1) \in \Delta$$

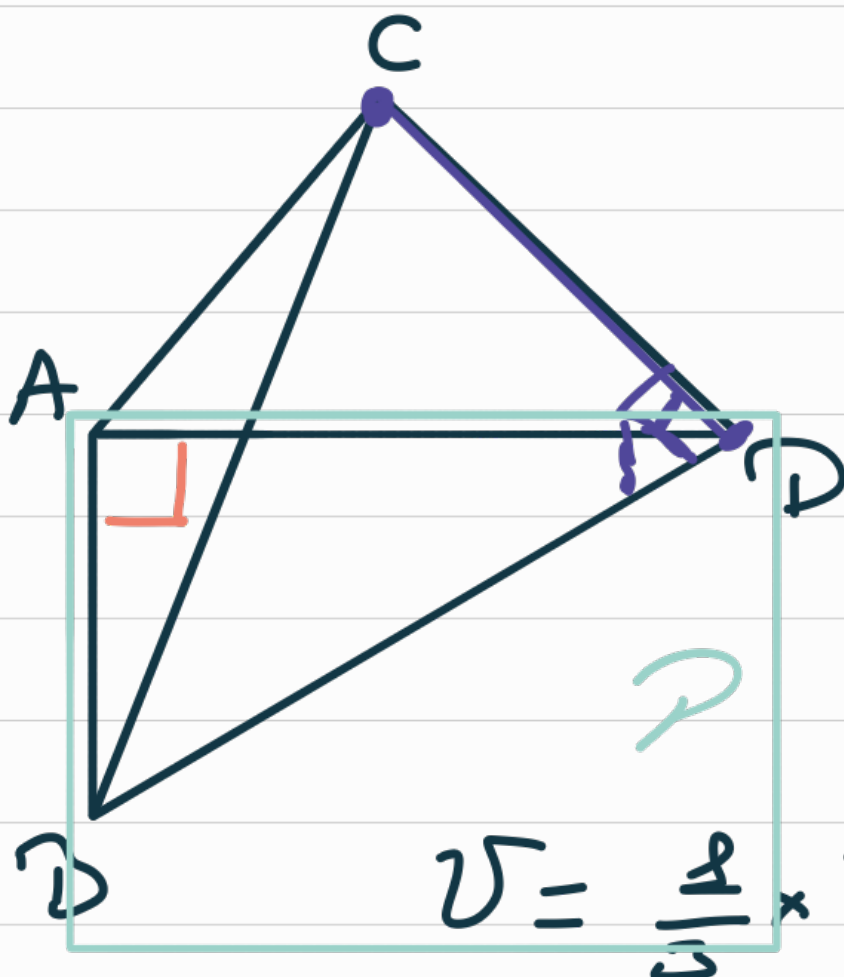
2) a) Comme $\mathcal{P}$ est perpendiculaire à Δ alors un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{u}(2; 1; 2)$ directeur de Δ .

$$3) a) \cdot \quad 1 \in \mathcal{P}$$

$$\cdot \quad \underline{\vec{DC} \perp \mathcal{P}}$$

$$\vec{DC}(-2; -1; -2) = -\vec{u}(2; 1; 2)$$

d)



$$B = \frac{AB \times AD}{2}$$

$$AB = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{18}$$

$$AD = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

hence $\beta = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{2}}{2} = 3.$

$$h = CD$$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$= 3$$

① henc $\gamma = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 = 3 \text{ u.v.}$