

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(4; 2; 2)$, $B(5; -2; 3)$ et $C(1; 1; 1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ .

1. Vérifier que la droite Δ passe par le point $C(1; 1; 1)$ mais pas par le point A . ✓

2. a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x + y + 2z - 14 = 0$. ✓

b. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ passe par le point B mais pas par le point C .

3. On considère le point $D(3; 2; 3)$.

a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.

b. Justifier que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.

$$\vec{AD} = x \vec{AC} + y \vec{AB}$$

c. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$. = 0 ✓

d. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur relative à cette base.

4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .

a. Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29} \right)$.

b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.

c. En déduire la distance du point D au plan (ABC) .

$$2) b) \begin{cases} 2x + y + 2z - 14 = 0 \\ B(5; -2; 3) \end{cases}$$

$$2 \times 5 + (-2) + 2 \times 3 - 14$$

$$= 10 - 2 + 6 - 14 = 0$$

donc $B \in \mathcal{P}$.

$$\bullet C(1; 1; 1)$$

$$2 \times 5 + 1 + 2 \times 1 - 14$$

$$= 10 + 1 + 2 - 14 = -1 \neq 0$$

donc $C \notin \mathcal{P}$.

3) a). $\vec{CD}(2; 1; 2) = \vec{n}(2; 1; 2)$
normal au plan.

$$D(3; 2; 3)$$

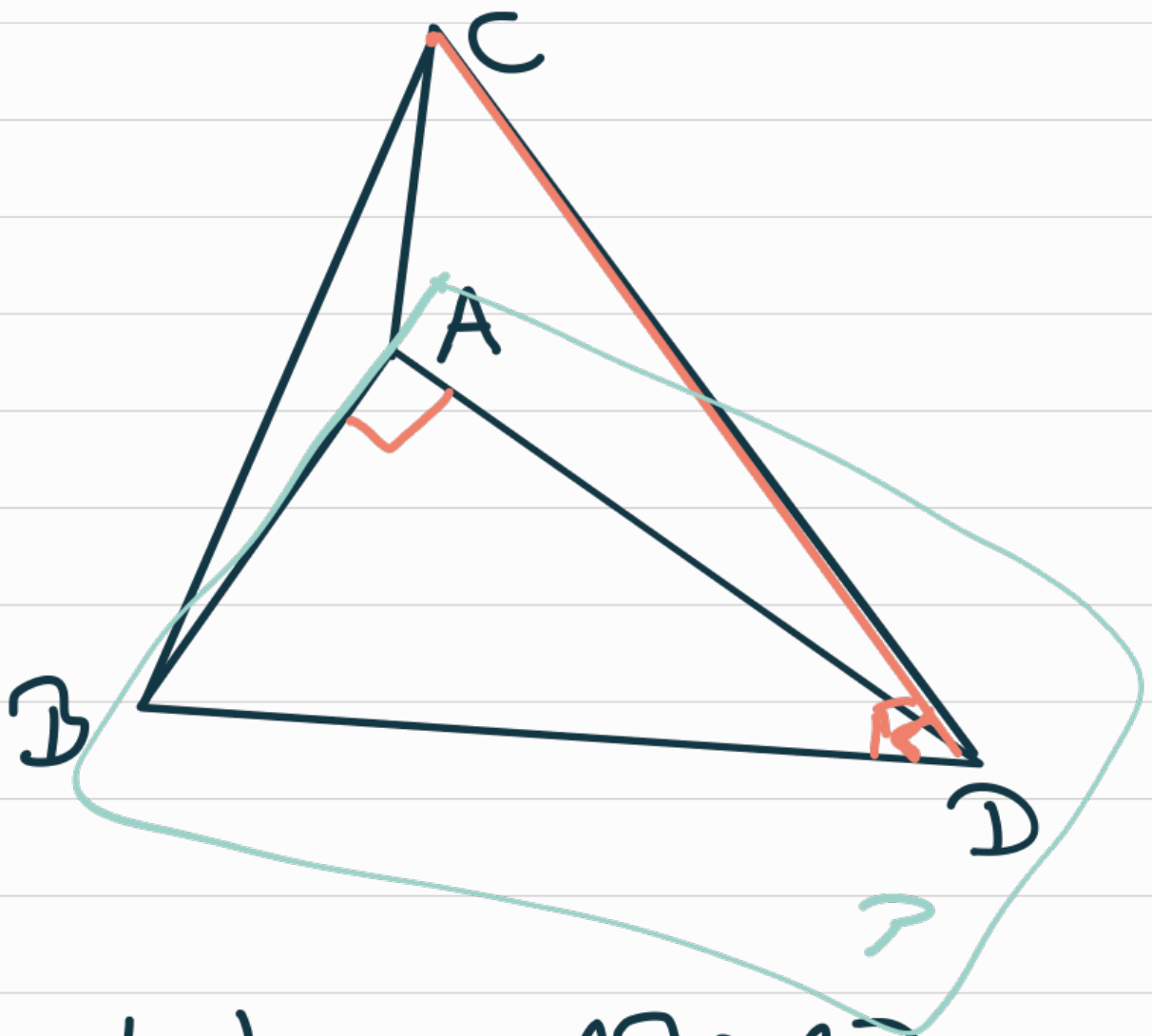
$$2 \times 3 + 2 + 2 \times 3 - 14$$

$$= 6 + 2 + 6 - 14 = 0$$

donc $D \in \mathcal{P}$.

DONC D projeté ortho.
de C sur $\mathcal{P}$.

d)



$$S = \frac{b \times h}{2} = \frac{AB \times AD}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{2}}{2}$$

$$= 3 \text{ u.a.}$$

$$h = CD = 3 \text{ u.}$$

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 \\ = 3 \text{ u.v.}$$

4) a) $B(5; -2; 3)$
 $\vec{BC}(-4; 3; -2)$

$$(BC): \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \underline{\underline{t \in \mathbb{R}}}$$

4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) .

a. Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}; \frac{-4}{29}; \frac{51}{29}\right)$.

b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.

c. En déduire la distance du point D au plan (ABC) .

- $H \in (\mathcal{DC})$

$$\hookrightarrow \frac{73}{29} = 5 - 4t \Rightarrow t = \checkmark$$

$$\frac{-4}{29} = -2 + 3t \Rightarrow t = \checkmark$$

$$\frac{51}{29} = 3 - 2t \Rightarrow t = \checkmark$$

- $(AH) \perp (\mathcal{DC})$



$$\vec{AH} \cdot \vec{DC} = 0$$