

Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;
- Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;
- Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;
- Option « Écoute hors-ligne » : 2 € de plus par mois quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné. Logiciel de simulation

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y .
2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .
3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut 10,475 et interpréter ce résultat dans le contexte.
4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y , arrondie au centième.
5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.
On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.
 - a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z .
 - b. Un responsable affirme que si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50% de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.
Justifier cette affirmation.

Données		Graphique	Stats
			V1/N1
Effectif total	n		1
Minimum	Min		5
Maximum	Max		18
Etendue	E		13
Moyenne	$\bar{x}$		10.475
Ecart type	σ		3.701942
Variance	σ^2		13.70438
Premier quartile	Q1		7
Troisième quartile	Q3		12

$$4) V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$(10,475)^2$

$$5^2 \cdot P(Y=5) + 7^2 \cdot P(Y=7) + \dots$$

$$V(X) \approx 13,70.$$

$$5) a) \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$V(X) = \sigma(X)^2$$

$$V(Z) = \sigma(Z)^2 = 2^2 = 4$$

$$b) \mathbb{P}(6 < Z < 12)$$

$$= \mathbb{P}(6-9 < Z-9 < 12-9)$$

$$= \mathbb{P}(-3 < Z-9 < 3)$$

$$= \mathbb{P}(|Z-9| < 3)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|Z-9| \geq 3)$$

$$\mathbb{P}(|X - E[X]| \geq a)$$

or d'après l'inégalité de Bienyamé - Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|Z-9| \geq 3) \leq \frac{V(Z)}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$\text{d'où } 1 - \mathbb{P}(|Z-9| \geq 3) \geq 1 - \frac{4}{9}$$

$$1 - P(|z - 9| > 3) > 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Donc :

$$P(6 < z < 12) > \frac{5}{9} \approx 0,56$$

EXERCICE 2 (4 points)

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à 4 000 individus au 1^{er} janvier 2025.

Partie A : étude d'un modèle discret

Dans cette partie, on modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n) . Pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1^{er} janvier de l'année 2025 + n .

La suite (u_n) est définie par :

- $u_0 = 4$.
- pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$.

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier n , $u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1^{er} janvier 2026 donnée par ce modèle. ✓
2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = 4 - \frac{4}{x}$.
 - a. Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. ✓
 - b. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
 - d. Justifier que $\ell = 2$.
 - e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?
3. On considère le script Python ci-dessous.
 - a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2; 4[$.
Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.

```
def population(s) :  
    u=4  
    n=0  
    while u >= s:  
        u = 4 - 4/u  
        n = n + 1  
    return n
```

- b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)` ? $n = 10$
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$2) \text{ b) } 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

or $u_{n+1} = h(u_n)$ et h est croissante sur $]0; +\infty[$.

d'où :

$$h(2) \leq h(u_{n+1}) \leq h(u_n) \leq h(4)$$

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3 \leq 4$$

donc $P(n+1)$ est vraie ...

c) (u_n) est décroissante et minorée par 2, donc (u_n) converge vers ℓ .

d) h est continue donc $\downarrow$
est solution de $h(x) = x$

• $h(x) = x$

$$4 - \frac{4}{x} = x$$

$$\frac{4x - 4}{x} = x$$

$$4x - 4 = x \times x$$

$$4x - 4 = x^2$$

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 0$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times -1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

done

$$x = 2$$