

DEUXIÈME PARTIE (14 points)

Exercice 1 (6 points)

Durant une fête foraine, une urne contient dix boules. Chaque boule est soit verte, soit rouge, indiscernable au toucher.

Un jeu est proposé aux personnes présentes à la fête foraine. Pour y participer le joueur doit d'abord payer 1 euro.

Ensuite,

- le joueur tire une première boule qu'il donne au forain, celui-ci note sa couleur puis remet la boule dans l'urne ;
- le joueur tire une deuxième boule, le forain note la couleur de ce deuxième tirage et remet à nouveau la boule dans l'urne.

Voici les récompenses qu'il obtient :

- si le joueur a tiré deux boules rouges, il reçoit 3 euros ;
- si le joueur a tiré deux boules vertes, il reçoit 1 euro ;
- sinon il ne reçoit pas d'argent.

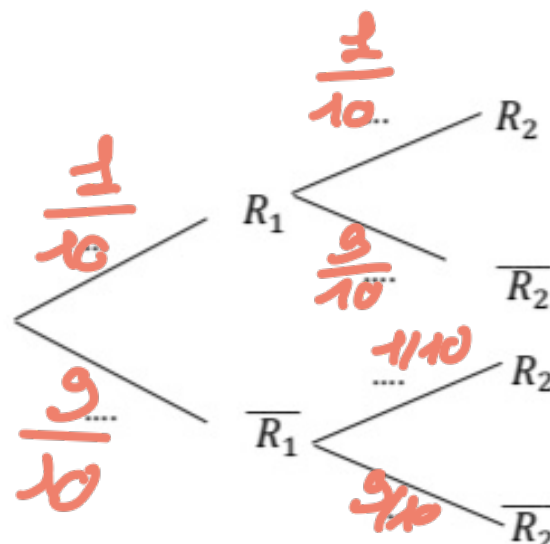
Partie A

Dans cette partie, on considère que cette urne contient 1 boule rouge et 9 boules vertes.

On note :

- R_1 l'événement : « La première boule tirée est rouge. »
- R_2 l'événement : « La deuxième boule tirée est rouge. »

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.



2. On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue après les deux tirages et les frais de participation au jeu de 1 euro.

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X . $\{2; 0; -1\}$

b. Montrer que $P(X = -1) = \frac{18}{100}$.

c. Recopier sur votre feuille et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

k	2	0	-1
$P(X = k)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{81}{100}$	$\frac{18}{100}$

d. Calculer l'espérance de X . Interpréter le résultat.

Partie B

Dans cette partie, on considère que cette urne contient maintenant n boules rouges et $10 - n$ boules vertes où n est un nombre entier naturel avec $0 \leq n \leq 10$.

On note Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique après les deux tirages.

1. Démontrer que $E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}$. $\Rightarrow n=0$
 $\Rightarrow n=5$

On expliquera la démarche mise en œuvre. Toute démarche, même incomplète, sera prise en compte dans la notation.

2. Pour combien de boules rouges dans l'urne le jeu est-il équitable entre le joueur et le forain ?

$$E[X] = 0$$

$$n_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20 + 20}{2 \times 4} = \frac{40}{8} = 5$$

$$2) \quad b) \quad P(X = -1)$$

$$= P(R_1 \cap \bar{R}_2) + P(\bar{R}_1 \cap R_2)$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{9}{100} + \frac{9}{100}$$

$$= \frac{18}{100}$$

$$c) \quad E[X] = 2 \times \frac{1}{100} + 0 \times \frac{81}{100} + (-1) \times \frac{18}{100}$$

$$= \frac{2}{100} - \frac{18}{100} = \frac{-16}{100}$$

$$\approx -0,16$$

En moyenne, le joueur perd $-0,16$ euros par partie.

Exercice 3 (4 points)

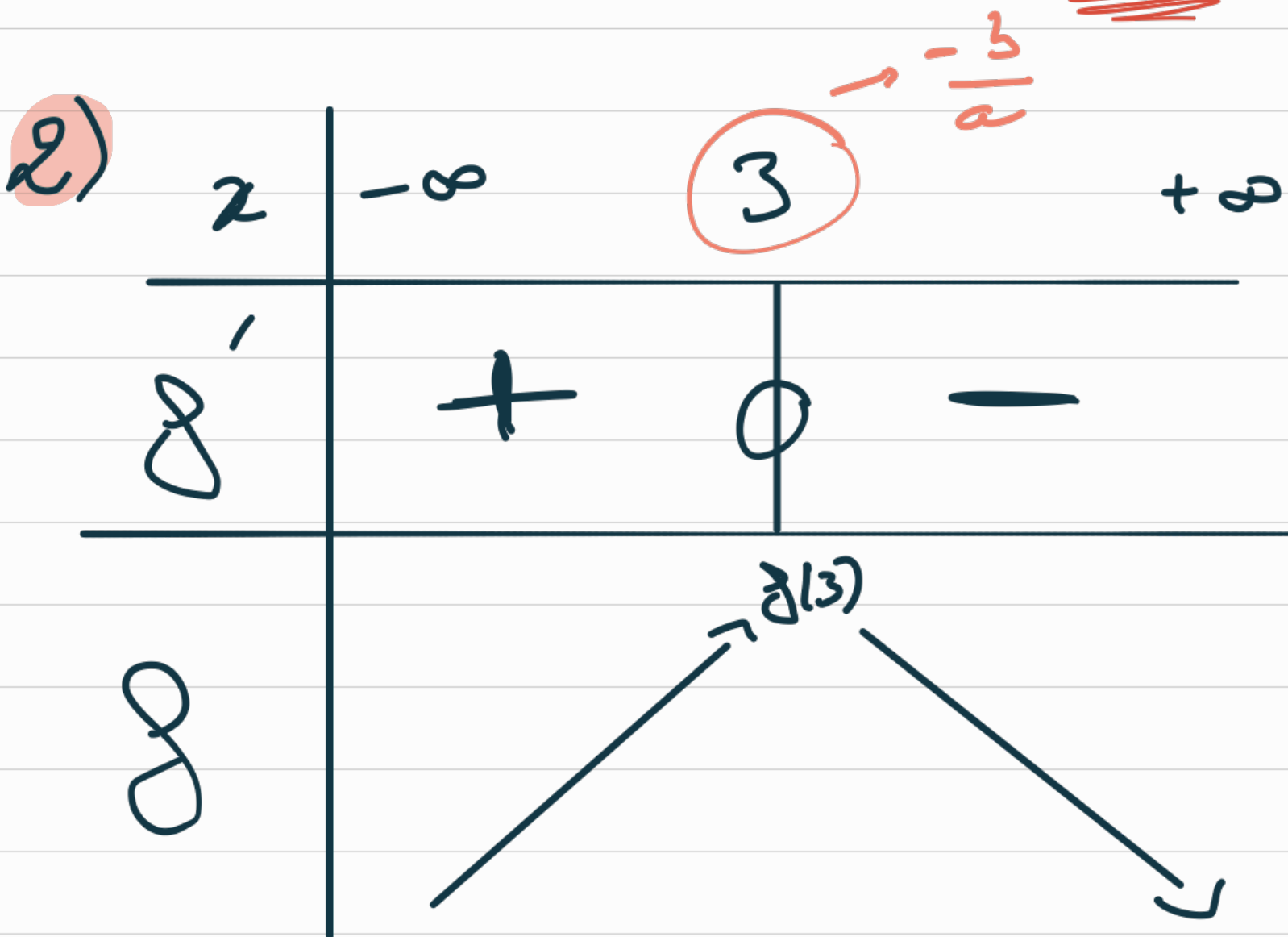
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (4x - 4)e^{-0,5x} + 5$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x + 6)e^{-0,5x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des points pour lesquels la tangente est horizontale ?
Si oui, on précisera les coordonnées exactes de ces éventuels points.



$$3) f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\begin{aligned} \text{et } f(3) &= (4 \times 3 - 4)e^{-0.5 \times 3} + 5 \\ &= 8e^{-1.5} + 5 \end{aligned}$$

donc la tangente est
horizontale au point de
coordonnées $(3; 8e^{-1.5} + 5)$.