

III - Modélisation mathématique

La biologie nous a montré que les kératinocytes se multiplient pour refermer la plaie, et que la vitesse de fermeture dépend de la surface encore ouverte.

Mathématiquement, cela se traduit par le fait que la vitesse de diminution de la surface est proportionnelle à la surface elle-même :

$$S'(t) = -k \cdot S(t)$$

avec $k > 0$: taux de cicatrisation.

Ainsi on obtient :

$$S(t) = S_0 \cdot e^{-kt}$$

où S_0 est la surface initiale
de la plaie au jour $t = 0$.

Étudions cette fonction afin
de vérifier qu'elle modélise
bien ce qu'on observe biologiquement.

$$S'(t) = - \underbrace{k}_{>0} \underbrace{S_0}_{>0} \underbrace{e^{-kt}}_{>0} < 0$$

donc S est strictement décroissante sur
 $[0; +\infty[$, ce qui est cohérent
avec la réalité biologique : la
plaie se referme progressivement.

$$\text{De plus, } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-kt} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0.$$

La surface tend vers 0, ce qui traduit mathématiquement la fermeture complète de la baie.

Prenons une plaie de surface initiale $S_0 = 100 \text{ mm}^2$, et $k = 0,17 \text{ jour}^{-1}$. $\rightarrow$ seuil critique

Ainsi $S(t) = 100 e^{-0,17t}$

On cherche le temps de fermeture, c'est-à-dire t tel que $S(t) \leq 1$

$\hookrightarrow$ seuil critique

$$S(t) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 100 e^{-0,17t} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,17t} \leq \frac{1}{100} = 0,01$$

$$\Leftrightarrow -0,17t \leq \ln(0,01)$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{-\ln(0,01)}{0,17} \simeq 27,0892.$$

Donc sans perturbation, la plaie se referme au bout d'environ 28 jours ou entre 27 jours et 28 jours.

Comme montré en partie II, gratter la croûte détruit les cellules néoformées et relance la phase inflammatoire.

Mathématiquement, cela revient à réinitialiser la fonction à une surface plus grande que celle atteinte.

Des études cliniques estiment que gratter ramène la plaie à environ 65 % de sa surface initiale.

Imaginons, que l'on gratte la croûte au jour $t_1 = 7$.

$$\bullet S(7) = 100 \times e^{-0.17 \times 7} \approx 30 \text{ mm}^2$$

$$\bullet S_1 = 65 \text{ mm}^2$$

La cicatrisation repart alors d'une nouvelle surface $S_1 = 65 \text{ mm}^2$, et notre fonction S devient :

$$S_g(t) = 65 e^{-0,17(t-7)}, \quad t > 7.$$

Cherchons alors le nouveau temps de fermeture de la croûte :

$$S_g(t) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 65 e^{-0,17(t-7)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,17(t-7)} \leq \frac{1}{65}$$

$$\Leftrightarrow -0,17(t-7) \leq \ln\left(\frac{1}{65}\right)$$

$$\Leftrightarrow t-7 > \frac{-\ln(65)}{-0,17} = \frac{\ln(65)}{0,17}$$

$$\Rightarrow \in > \frac{A_n(65)}{0,17} + 7$$

$$\approx 31,56$$

Ainsi avec un seul épisode de grattage au T^e jour de cicatrisation, la plaie se referme entièrement au bout d'environ 32 jours, se qui rallonge de 4 à 5 jours la cicatrisation.