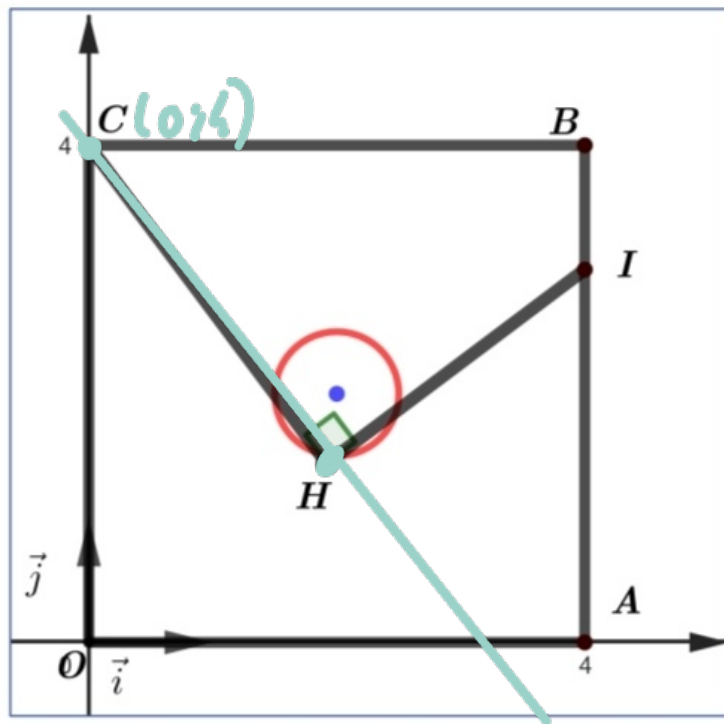


Exercice 1 (X points)

On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



On dispose des données suivantes :

- Le quadrilatère $OABC$ est un carré de côté 4 ;
- On a $A(4; 0), B(4; 4), C(0; 4), I(4; 3)$;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI) ;
- On note $\mathcal{E}$ le cercle de centre $D(2; 2)$ et de rayon 0,5.

1.a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OC}$.

b. En déduire le produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OC}$.

2. a. Exprimer le produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OC}$ en fonction des longueurs OH et OI .

b. Calculer la longueur OI .

c. En déduire que $OH = 2,4$.

3. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CH) .

b. Justifier qu'une équation du cercle $\mathcal{E}$ est :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0.$$

c. Le point $M(1,5; 2)$ appartient-il à l'intersection du cercle $\mathcal{E}$ et de la droite (CH) ? Justifier.

Aide au calcul.

$$0,5^2 = 0,25$$

$$1,5^2 = 2,25$$

$$2,5^2 = 6,25$$

$$5 \times 2,4 = 12$$

1) a) $\vec{OI}(4;3)$

$$\vec{OC}(0;4)$$

b) $\vec{OI} \cdot \vec{OC} = 4 \times 0 + 3 \times 4 = 12$

2) a) $\vec{OI} \cdot \vec{OC} = \vec{OI} \cdot \vec{OH}$
 $= OI \times OH$

b) $OI = \sqrt{(0-4)^2 + (0-3)^2}$
 $= \sqrt{16 + 9}$
 $= \sqrt{25}$
 $= 5$

$$c) \vec{OI} \cdot \vec{OC} = OI \times OH$$

$$12 = 5 \times OH$$

$$\text{donc } OH = \frac{12}{5}$$

$$3) a) \cdot C(0; 4) \in (CH)$$

$$\cdot \vec{OI}(4; 3) \text{ normal } \vec{n}(CH)$$

$$\forall (x; y) \in (CH)$$

$$\Leftrightarrow \vec{OI}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \perp \vec{CM}\left(\begin{pmatrix} x-0 \\ y-4 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow \vec{OI} \cdot \vec{CM} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3(y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y - 12 = 0$$

b) $\mathcal{D}(2; 2)$ et $r = 0,5$

$$(\mathcal{E}) : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 0,5^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 0,25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 4y + 8 - 0,25 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 4y + 7,75 = 0$$

c) $\mathcal{M}(1,5; 2)$

$$\bullet (1,5)^2 - 4 \times 1,5 + 2^2 - 4 \times 2 + 7,75$$

$$= 2,25 - 6 + 4 - 8 + 7,75$$

$$= -10 + 10 = 0$$

$$\text{done} \quad r \in (\varepsilon)$$

$$\bullet \quad 4 \times 1,5 + 3 \times 2 - 12$$

$$= 6 + 6 - 12$$

$$= 0$$

$$\text{done} \quad r \in (CH)$$

$$\text{Done} \quad r \in (\varepsilon) \cap (CH).$$

Exercice 3 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (4x - 4) e^{-0,5x} + 5$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x + 6) e^{-0,5x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des points pour lesquels la tangente est horizontale ?
Si oui, on précisera les coordonnées exactes de ces éventuels points.

$$(3; 8e^{-1,5} + 5)$$

$$f'(x) = 0$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	+	0	-
f		$8e^{-1,5} + 5$	

$$\begin{aligned} f(3) &= (4 \times 3 - 4) e^{-0,5 \times 3} + 5 \\ &= 8e^{-1,5} + 5 \end{aligned}$$