

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 (X points)

En 2020, une ville comptait 10 000 habitants.

On modélise l'évolution du nombre d'habitants de cette ville par la suite (u_n) définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,08u_n - 300, & n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 10\,000 \end{cases};$$

où u_n représente le nombre d'habitants pour l'année 2020+n.

- Indiquer ce que représente u_1 et calculer sa valeur.
- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3750$.

a. Déterminer v_0 .

b. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a $v_{n+1} = 1,08v_n$.

c. En déduire la nature de la suite (v_n) .

d. Pour tout entier naturel n , exprimer, v_n en fonction de n .

e. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_n = 6250 \times 1,08^n + 3750$.

- Le tableau ci-contre, extrait d'une feuille automatisée de calcul, a été obtenue par recopie vers le bas après avoir saisi la formule suivante dans la cellule B2 :

$$= 6250 * 1,08^{A2} + 3750$$

La municipalité envisage d'ouvrir une nouvelle école maternelle dès que la population atteindra 19 000 habitants.

La construction d'un tel établissement nécessitant deux ans, déterminer l'année à partir de laquelle la construction de l'école doit commencer.

$\Rightarrow 2030$

	A	B
1	n	Un
2	0	10000
3	1	10500
4	2	11040
5	3	11623,2
6	4	12253,056
7	5	12933,30048
8	6	13667,96452
9	7	14461,40168
10	8	15318,31381
11	9	16243,77892
12	10	17243,28123
13	11	18322,74373
14	12	19488,56323
15	13	20747,64829
16	14	22107,46015
17	15	23576,05696
18	16	25162,14152
19	17	26875,11284
20	18	28725,12187
21	19	30723,13162

Aide au calcul :

$$10\,000 - 3\,750 = 6\,250 ;$$

$$1,08 \times 4\,050 = 4\,374 ;$$

$$\frac{4\,050}{1,08} = 3\,750 ;$$

$$3\,750 \times 1,08 = 4\,050.$$

1) u_1 représente le nombre d'habitant en 2021.

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,08 \times 10\,000 - 300 \\ &= 10\,800 - 300 \\ &= 10\,500. \end{aligned}$$

2) a)
$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 3750 \\ &= 10\,000 - 3750 \\ &= 6\,250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 3750 \\
 &= 1,08u_n - 200 - 3750 \\
 &= 1,08u_n - 4050 \\
 &= 1,08 \left(u_n - \frac{4050}{1,08} \right) \\
 &= 1,08(u_n - 3750) \\
 &= 1,08v_n
 \end{aligned}$$

c) (v_n) est géométrique de raison 1,08 et de premier terme $v_0 = 6250$.

$$d) \quad v_n = v_0 \times q^n = 6250 \times (1,08)^n$$

e) $v_n = u_n - 3750$

$\Leftrightarrow v_n + 3750 = u_n$

donc $u_n = 6250 \times (1,08)^n + 3750$

EXERCICE 4

Suite arithmético-géométrique

(5 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 800 \\ u_{n+1} = 0,6u_n + 400 \end{cases}$$

1) a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Pourquoi ?

2) On pose $v_n = u_n - 1\,000$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on donnera la raison et le premier terme v_0 .

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .

~~c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?~~

$$\begin{aligned} 2) \quad a) \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 1000 \\ &= 0,6u_n + 400 - 1000 \\ &= 0,6u_n - 600 \\ &= 0,6 \left(u_n - \frac{600}{0,6} \right) \\ &= 0,6 (u_n - 1000) \\ &= 0,6 v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est géométrique
de raison 0,6 et de premier

terme $v_0 = u_0 - 1000 = 800 - 1000$
 $= -200$

b) $v_n = v_0 \times q^n$

$$= -200 \times 0,6^n$$

• $v_n = u_n - 1000$

$$\Leftrightarrow v_n + 1000 = u_n$$

donc $u_n = -200 \times 0,6^n + 1000$

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -2u_n + 3$

1. a. Calculer u_1 , u_2 et u_3
b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1$
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison -2 .
3. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n .

b)
$$\begin{cases} u_1 - u_0 = -9 - 6 = -15 \\ u_2 - u_1 = 21 - (-9) = 30 \end{cases}$$

pas arithmétique.

$$\begin{cases} \frac{u_0}{u_1} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3} \\ \frac{u_1}{u_2} = \frac{-9}{21} = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

pas géométrique

$$2) \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$

$$= -2u_n + 3 - 1$$

$$= -2u_n + 2$$

$$= -2 \left(u_n + \frac{2}{-2} \right)$$

$$= -2 (u_n - 1)$$

$$= -2 v_n$$

donc (v_n) est géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 6 - 1 = 5$.

$$3) \quad v_n = v_0 \times q^n = 5 \times (-2)^n$$

$$v_n = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n = v_n + 1$$

$$\text{done } u_n = 5 \times (-2)^n + 1$$

EXERCICE 4

Suite arithmético-géométrique

(5 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

On pose $v_n = u_n - 6$

- 1) a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
c) ~~Donner une valeur approchée de u_8 à 10^{-3} près.~~
~~Que peut-on conjecturer sur la limite de la suite ? Justifier.~~
- 2) On note $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{100}$.
 - a) Déterminer la valeur exacte de S puis une valeur approchée.
 - b) En déduire une valeur approchée de la somme $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$.