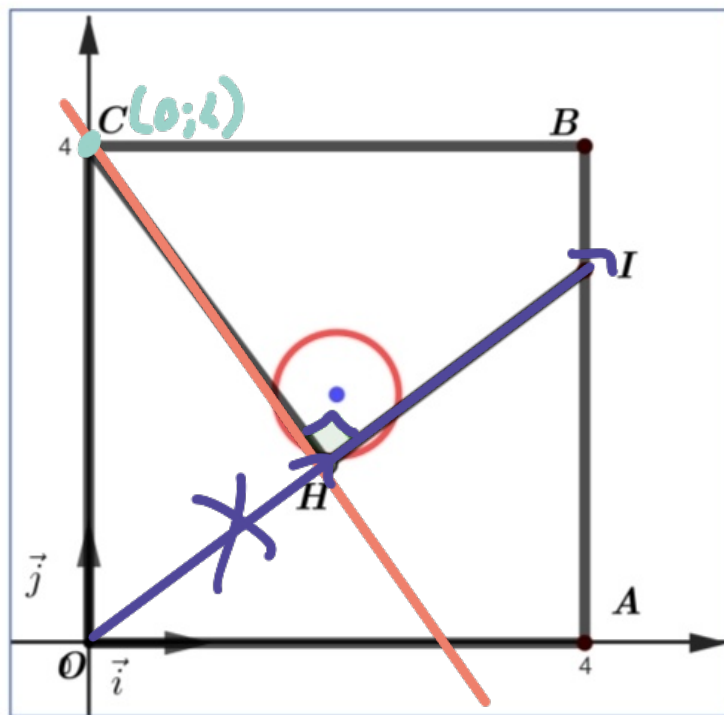


Exercice 1 (X points)

On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



On dispose des données suivantes :

- Le quadrilatère $OABC$ est un carré de côté 4 ;
- On a $A(4; 0), B(4; 4), C(0; 4), I(4; 3)$;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI) ;
- On note $\mathcal{E}$ le cercle de centre $D(2; 2)$ et de rayon 0,5.

1.a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OC}$.

b. En déduire le produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OC}$.

2. a. Exprimer le produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OC}$ en fonction des longueurs OH et OI .

b. Calculer la longueur OI .

$$\vec{OI} \cdot \vec{OC} = \vec{OI} \cdot \vec{CH} = OI \times OH$$

c. En déduire que $OH = 2,4$.

3. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CH) .

b. Justifier qu'une équation du cercle $\mathcal{E}$ est :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0.$$

c. Le point $M(1,5; 2)$ appartient-il à l'intersection du cercle $\mathcal{E}$ et de la droite (CH) ? Justifier.

Aide au calcul.

$$0,5^2 = 0,25$$

$$1,5^2 = 2,25$$

$$2,5^2 = 6,25$$

$$5 \times 2,4 = 12$$

$$\underbrace{\vec{OI} \cdot \vec{OC}}_{12} = \underbrace{OI}_{5} \times OH$$

$$\text{donc } OH = \frac{12}{5} = 2,4$$

3) $\left. \begin{array}{l} C(0;4) \in (CH) \\ \vec{OI}(4;3) \text{ normal à } (CH) \end{array} \right\}$

• $M(x;y) \in (CH)$

ssi $\vec{OI}(4;3) \perp \vec{CM}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-4 \end{pmatrix}$

ssi $\vec{OI} \cdot \vec{CM} = 0$

ssi $4x + 3(y-4) = 0$

ssi $4x + 3y - 12 = 0$

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \text{ directeur de } (d) \\ A \text{ point de } (d) \end{array} \right.$

$\forall (x; y) \in (d)$

ssi $\vec{u}$ et $\vec{AA'}$ sont colinéaires $\rightarrow$

ssi $\det(\vec{u}; \vec{AA'}) = 0$

$$\left| \begin{array}{cc} x & x' \\ y & y' \end{array} \right| = xy' - yx'$$

centre $(a; b)$ et rayon r

$$\hookrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$b) (C) : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 0,5^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 0,25$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + 8 - 0,25 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + 7,75 = 0$$

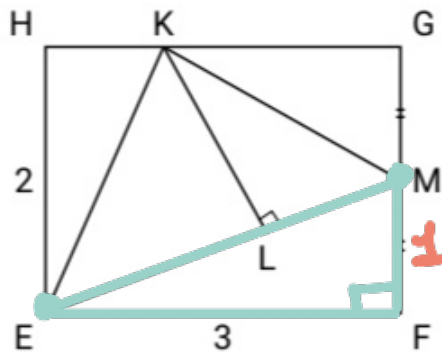
Exercice 3 (~6 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

$EFGH$ est un rectangle avec $EH = 2$ et $EF = 3$. M est le milieu de $[FG]$ et K est défini par $\vec{HK} = \frac{1}{3}\vec{HG}$.

L est le projeté orthogonal de K sur la droite (EM) .



1. Montrer que $\vec{EK} \cdot \vec{EM} = 5$. On pourra s'aider de la relation de Chasles.
2. En écrivant le produit scalaire de $\vec{EK} \cdot \vec{EM}$ de deux manières différentes, déterminer :
 - (a) La longueur EL .
 - (b) Une mesure de l'angle $\widehat{KEM}$.

$$\begin{aligned} & \text{1) } \vec{EK} \cdot \vec{EM} \\ &= (\vec{EH} + \vec{HK}) \cdot (\vec{EF} + \vec{FM}) \\ &= \underbrace{\vec{EH} \cdot \vec{EF}}_{=0} + \underbrace{\vec{EH} \cdot \vec{FM}}_{EH \times FM} + \overbrace{\vec{HK} \cdot \vec{EF}}^{HK \times EF} + \underbrace{\vec{HK} \cdot \vec{FM}}_{=0} \\ &= EH \times FM + HK \times EF \end{aligned}$$

$$= 2 \times 1 + 1 \times 3$$

$$= 5$$

2) a) $\vec{E}_K \cdot \vec{E}_M = \vec{E}_L \times \vec{E}_M$

$\underbrace{\hspace{10em}}_5$

$= EL \times EM$

Pythagore $EM^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

donc $EM = \sqrt{10}$

• $5 = EL \times \sqrt{10}$

donc $EL = \frac{5}{\sqrt{10}}$

$$b) \vec{E_K} \cdot \vec{E_M} = E_K \times \underbrace{E_M}_{\sqrt{10}} \times \cos(\widehat{KEM})$$

5

Pythagore: $E_K^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

donc $E_K = \sqrt{5}$.

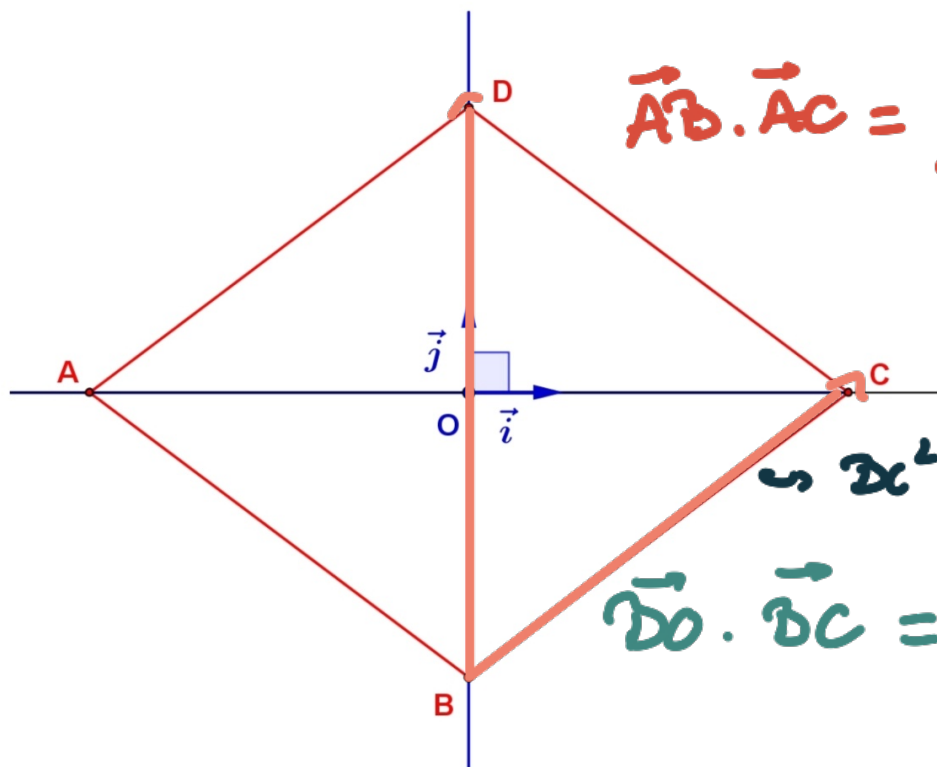
$$5 = \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \cos(\widehat{KEM})$$

$$\text{donc } \cos(\widehat{KEM}) = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{et } \widehat{KEM} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

Exercice 5

ABCD est un losange de centre O tel que OA=4 et OD = 3.



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

$$\hookrightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\vec{DO} \cdot \vec{DC} = \frac{1}{2} (DO^2 + DC^2 - OC^2)$$

1. Calculer les produits scalaires suivants:

a. $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$

b. $\vec{BO} \cdot \vec{BC}$

c. $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$

d. $\vec{BC} \cdot \vec{BD}$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AC} \cdot \vec{AO}$$

$$= AC \times AO$$

$$= 8 \times 4$$

$$= 32$$

48 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 5 \text{ et } \|\vec{v} + \vec{u}\| = 4.$$

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} (4^2 - 3^2 - 5^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times -18$$

$$= -9$$

47 ABC est un triangle tel que :

$$AB = 3, BC = 5 \text{ et } AC = 6.$$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= \frac{1}{2} \left(AB^2 + AC^2 - BC^2 \right)\end{aligned}$$

40 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3; -1)$, $B(-2; 1)$ et $C(2; 0)$.

Calculer :

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ b) $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$ c) $\vec{AB}^2$ d) AB

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que $AB=5$, $AC=3$ et $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4}$.

Déterminer $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$.

Déterminer $\|\vec{v}\|$.

$$\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_7 = \underbrace{\|\vec{u}\|}_{2} \times \|\vec{v}\| \times \underbrace{\cos(\vec{u}, \vec{v})}_{\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}\| = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

Exercice 3

Soit $M(1;3)$, $N(4; -2)$ et $P(2; -1)$ trois points dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\vec{MN} \cdot \vec{MP} = 23$

2. En déduire une valeur approchée de $\widehat{NMP}$ en degrés à 0,1 près.

$$MN = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

$$MP = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de la droite d passant par le point A de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. $A(1; -2)$ et $\vec{u}(5; 4)$

2. $A(-2; 3)$ et $\vec{u}(-1; 3)$

3. $A(-5; 1)$ et $\vec{u}(4; 0)$

4. $A(1; 1)$ et $\vec{u}(1; 1)$

1) $M(x; y) \in (d)$

ssi $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}$ sont
colinéaires.

ssi $\det(\vec{u}; \vec{AM}) = 0$

ssi $5(y+2) - 4(x-1) = 0$

ssi $5y + 10 - 4x + 4 = 0$

ssi $-4x + 5y + 14 = 0$

Exercice 4 corrigé disponible

Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ dont un vecteur normal est $\vec{n}(8; -5)$ et passant par $A(3; 5)$

$$\forall (x; y) \in \Delta$$

ssi $\vec{n} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

$$\text{ssi } \vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$$

$$\text{ssi } 8(x-3) - 5(y-5) = 0$$

$$\text{ssi } 8x - 24 - 5y + 25 = 0$$

$$\text{ssi } 8x - 5y + 1 = 0$$

Exercice 2 corrigé disponible

Soit la droite Δ passant par $A(5;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-3;5)$

1. Déterminer une équation cartésienne de Δ

Exercice 9 corrigé disponible

Dans un repère orthonormal, le cercle C a pour équation : $x^2 + y^2 - 6x - 5y + 2 = 0$.

Déterminer son centre et son rayon.

$$x^2 + y^2 - 6x - 5y + 2 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y-\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 2 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 - \frac{53}{4} = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{53}{4} \quad r^2$$

donc centre $(3; \frac{5}{2})$ et rayon $\frac{\sqrt{53}}{2}$.