

Partie B

Dans cette partie, on considère que cette urne contient maintenant n boules rouges et $10 - n$ boules vertes où n est un nombre entier naturel avec $0 \leq n \leq 10$.

On note Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique après les deux tirages.

1. Démontrer que $E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}$.

On expliquera la démarche mise en œuvre. Toute démarche, même incomplète, sera prise en compte dans la notation.

2. Pour combien de boules rouges dans l'urne le jeu est-il équitable entre le joueur et le forain ?

$$2) E[Y] = \frac{4n^2 - 20n}{100}$$

$$E[Y] = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{4n^2 - 20n}{100} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 - 20n = 0$$

$$\Leftrightarrow n(4n - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 0 \text{ ou } 4n - 20 = 0$$

$$4n = 20$$

$$n = \frac{20}{4} = 5$$

Exercice 3 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (4x - 4) e^{-0,5x} + 5$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x + 6) e^{-0,5x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des points pour lesquels la tangente est horizontale ?
Si oui, on précisera les coordonnées exactes de ces éventuels points.

$$f'(x) = 0$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{ax+b})' = a \times e^{ax+b}$$

$$1) f'(x) = 4 \times e^{-0,5x} + (4x - 4) \times -0,5 \times e^{-0,5x}$$

$$= e^{-0,5x} (4 + (4x - 4) \times -0,5)$$
$$= e^{-0,5x} (4 - 2x + 2) = e^{-0,5x} (-2x + 6).$$

2) $f'(x) = (-2x + 6) \underbrace{e^{-0,5x}}_{> 0}$

$\swarrow$?

x	$-\infty$	$\textcircled{3}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$8e^{-1,5} + 5$		

$$f(3) = (4 \times 3 - 4) e^{-0,5 \times 3} + 5$$

$$= 8e^{-1,5} + 5$$

$$ax + b$$

$$a > 0$$

$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$-$	ϕ	$+$

$$a < 0$$

$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$+$	ϕ	$-$

3) f admet une tangente horizontale au point :

$$(3; 8e^{-1,3} + 5)$$

Analyse et polynômes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- 1) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
- 2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- 3) Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$. Préciser les extremums locaux.
- 4) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a = 2$.
- 5) Justifier que $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$.

En déduire les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

$$1) f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$\begin{aligned} 2) \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= -4 \times 0 \times -3 \\ &= 36 \end{aligned}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0$$

- f admet un maximum en $x = -1$ et un minimum en $x = 1$.

$$f'(2) = 9 \quad f(2) = 4$$

$$y = 9(x - 2) + 4$$

$$= 9x - 18 + 4$$

$$= 9x - 14$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(x^2 + 2x + 1)(x + 2)}$$

Fonction exponentielle

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 1)e^x$.

1) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x :

$$g'(x) = (2x + 1)e^x$$

2) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$. On rappelle que pour tout réel x , $e^x > 0$.

3) En déduire le tableau de variations de la fonction g .

4) Déterminer l'abscisse du point de la courbe $\mathcal{C}_g$ où la tangente est horizontale.

5) a) Résoudre par le calcul l'équation $g(x) = 0$.

b) En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_g$ avec l'axe des abscisses.

c) Dresser, à l'aide des questions précédentes, le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe g	—	○	+

tangente horizontale $\Rightarrow f'(x) = 0$

intersection axe des abscisses $\Rightarrow f(x) = 0$

intersection avec axe des ordonnées $\Rightarrow f(0)$.

