

Exercice 1 (5 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 0,4y = e^{-0,4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t .

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = te^{-0,4t}$
Vérifier que u est solution de E .

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.

Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0,4y = 0$.

- a. Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) .

On admettra que la réciproque est vraie.

- b. Résoudre l'équation différentielle (H) . $\rightarrow y' = -0,4y \Rightarrow y(t) = Ce^{-0,4t}, C \in \mathbb{R}$
- c. En déduire les solutions de (E) . $\rightarrow y(t) = Ce^{-0,4t} + u(t), C \in \mathbb{R}$
- d. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

$$g(t) = e^{-0,4t} + te^{-0,4t}$$

2) a) Montrons que f est solution de (E) , c.à.d :

$$f' + 0,4f = e^{-0,4t}$$

$$\text{or } g(t) = f(t) - u(t)$$

$$\Leftrightarrow f(t) = g(t) + u(t).$$

$$f'(t) = g'(t) + u'(t).$$

$$f'(t) + 0,4 f(t)$$

$$= g'(t) + u'(t) + 0,4 g(t) + 0,4 u(t)$$

$$= \underbrace{g'(t) + 0,4 g(t)}_{\text{or } g \text{ est solution de } \mathcal{G}(H)} + \underbrace{u'(t) + 0,4 u(t)}_{\text{or } u \text{ est solution de } \mathcal{E}}$$

or g est solution
de $\mathcal{G}(H)$

or u est
solution de $\mathcal{E}$

$$= 0 + e^{-0,4 t}$$

$$= e^{-0,4 t}$$

donc f est solution de $(\mathcal{E})$.

Partie B

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde (m.s^{-1}), en fonction de t , par une fonction v définie sur $[0; +\infty[$.

On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée ;
- la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0,6y = e^{-0,6t}$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y .

On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1} , c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1. a. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + 0,6y = 0$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0; +\infty[$.

- b. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = te^{-0,6t}$.

Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E) .

- c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0; +\infty[$.

- d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$v(t) = (12 + t)e^{-0,6t}$$

$$y(t) = Ce^{-0,6t} + te^{-0,6t}, \text{ car } y(0) = 12$$

Partie B :

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

1. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,747$.
2. Calculer $P(X \geq 6)$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22,53$ et $V(Y) = 9,81$.

On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative dans cette auto-école.

$$E[Z] = 30$$

- a. Exprimer Z en fonction de X et Y . En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
- b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé -Tchebychev, montrer que la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est inférieure à 0,12.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{Z \leq 20\} \cup \{Z \geq 40\}) \\ &= \mathbb{P}(\{Z - 30 \leq -10\} \cup \{Z - 30 \geq 10\}) \\ &= \mathbb{P}(|Z - 30| \geq 10) \\ &\leq \frac{V(Z)}{10^2} = \frac{11,7}{100} \approx 0,117 \\ &\leq 0,12 \end{aligned}$$

5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.

On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z .

b. Un responsable affirme que si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50% de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.

Justifier cette affirmation.

$$P(6 < Z < 12)$$

$$= P(-3 < \underbrace{Z-9}_{-a < x < a} < 3)$$

$$= P(|Z-9| < 3) \quad \downarrow \quad |x| < a$$

$$= 1 - P(|Z-9| \geq 3)$$

or d'après l'inégalité de
Chebyshev :

$$P(|Z-9| \geq 3) \leq \frac{V(Z)}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$\text{d'où } 1 - P(|Z-9| \geq 3) \geq 1 - \frac{4}{9}$$

$$1 - P(|Z-9| \geq 3) \geq 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Ans: :

$$P(0 < Z < 1.2) \geq \frac{5}{9} \quad \begin{matrix} \text{--- } 0.56 \\ \geq 0.1 \end{matrix}$$