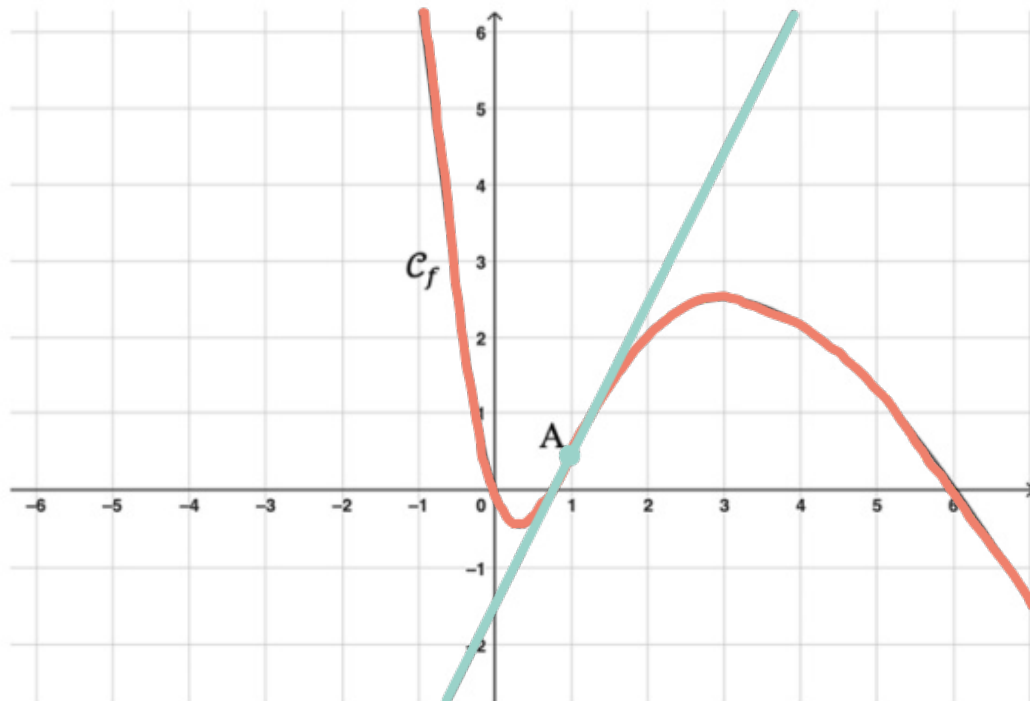


EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$ et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f , les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. a. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,

$$f(x) = x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$$

b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.

4. a. Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x ,

$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}.$$

a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

c. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$.

1) f semble convexe de $]-1; 1]$ car ϵ_g est au dessus de sa tangente.

f semble concave de $[1; +\infty[$ car ϵ_g est au dessous de sa tangente.

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x^2 + 1) = +\infty$

Donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$3) \text{ a) } x \left(10 \frac{\ln(x)}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^4} \right)$$

$$= 10 \cancel{x} \times \frac{\ln(x)}{\cancel{x}} - 3x + 5 \ln \left(\frac{x^4 + 1}{x^4} \right)$$

$$= 10 \ln(x) - 3x + 5 \left[\ln(x^4 + 1) - \ln(x^4) \right]$$

$$= 10 \ln(x) - 3x + 5 \ln(x^4 + 1) - 5 \ln(x^4)$$

$f(x)$

$$= \cancel{10 \ln(x)} + f(x) - \cancel{10 \ln(x)}$$

$$= f(x)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ par C.C}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln P_n(x)}{x} - 3 = -3$$

et par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln P_n(x)}{x} - 3 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} P_n(x) = P_n(1) = 0$$

donc par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\text{Donc par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

4) a) $f'(x) = 5 \times \frac{2x}{x^4+1} - 3$

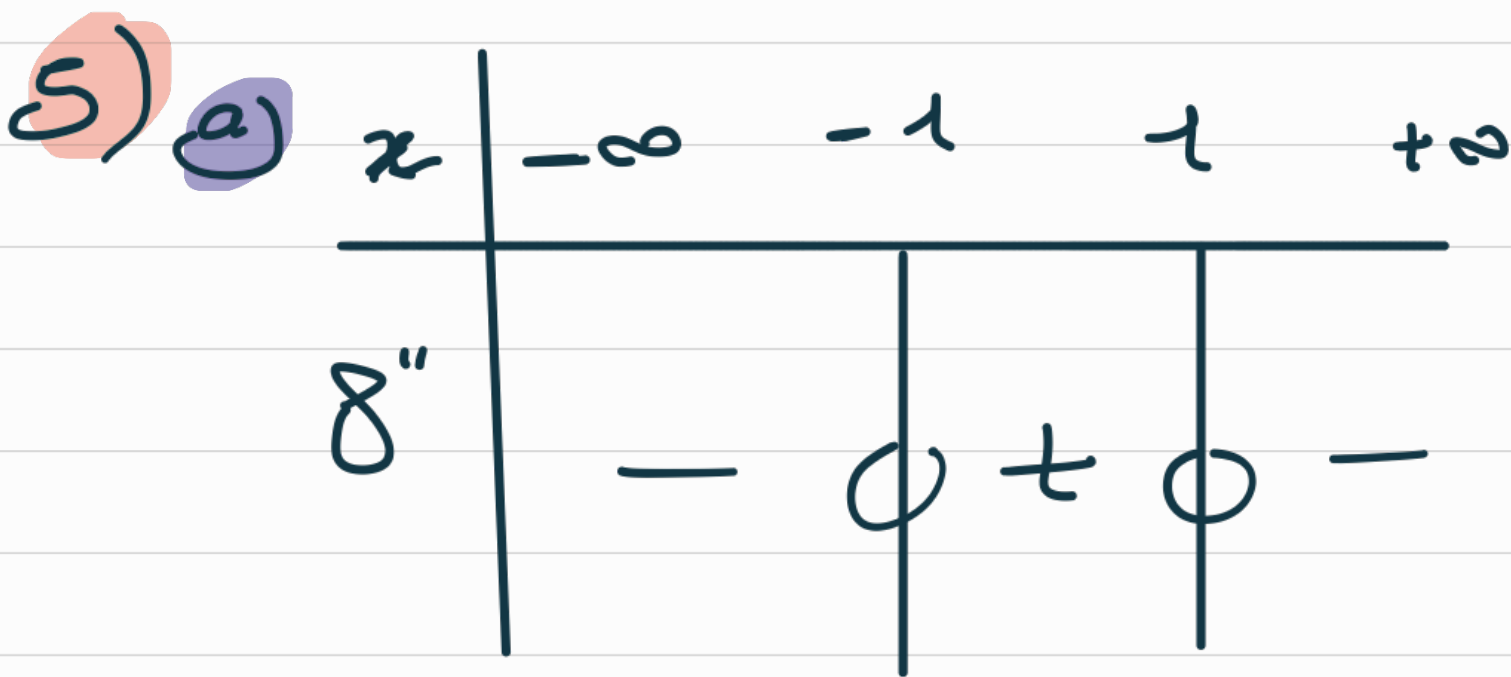
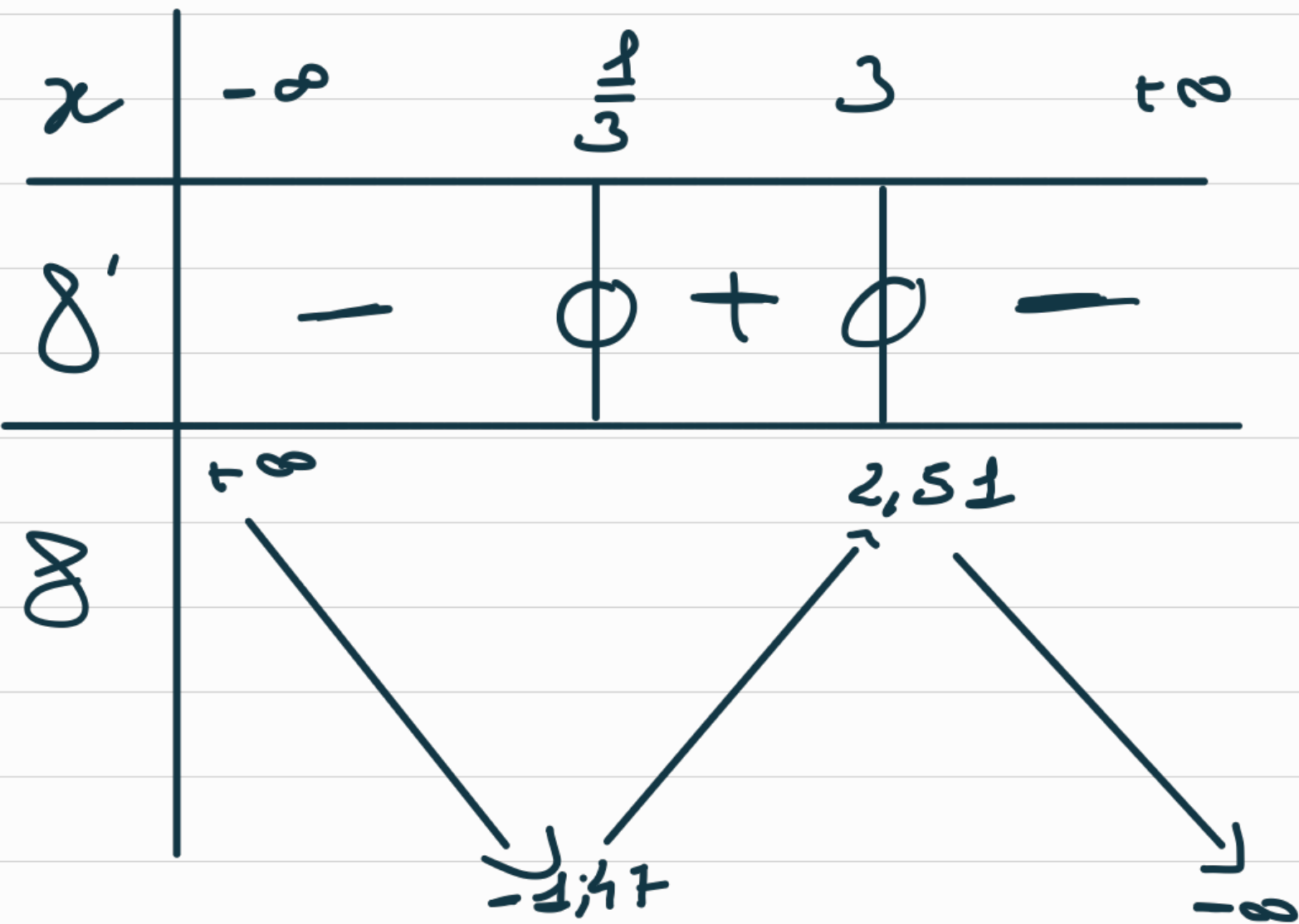
$$= \frac{10x}{x^4+1} - 3$$

$$= \frac{10x - 3(x^4+1)}{x^4+1} > 0$$

$$= \frac{10x - 3x^4 - 3}{x^4+1}$$

b) $\Delta = 144 - 36 = 64$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = \frac{1}{3}$$



c) f ist concave auf $[1; +\infty[$

$$f(x) \leq 2x - 5 + 5\ln(2)$$

$$5\ln(x^4 + 1) - 3x \leq 2x - 5 + 5\ln(2)$$

$$5\ln(x^4 + 1) \leq 2x - 5 + 5\ln(2) + 3x$$

~~$$5\ln(x^4 + 1) \leq 5x - 5 + 5\ln(2)$$~~

$$\ln(x^4 + 1) \leq x - 1 + \ln(2)$$