

On note  $t$  le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction  $p$  telle que :

- la fonction  $p$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  ;
- $p(0) = 4$  ;
- la fonction  $p$  est solution de l'équation différentielle  $(E) \ y' + y = 2$  où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $t$ .

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$ .

2. En déduire que l'expression de la fonction  $p$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  est  $p(t) = 2e^{-t} + 2$ .

3. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

1)

$$y' = ay + b$$
$$y(x) = k e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y' + y = 2 \Leftrightarrow y' = -y + 2$$

donc

$$y(t) = k e^{-t} + 2, \quad C \in \mathbb{R}$$

2)

$$p(t) = k e^{-t} + 2$$
$$p(0) = 4$$

$$p(0) = k e^0 + 2 = k + 2$$

$$p(0) = 4 \quad \Leftrightarrow k + 2 = 4$$

$$\Rightarrow k = 4 - 2$$

$$\Rightarrow k = 2$$

donc :

$$p(t) = 2e^{-t} + 2$$

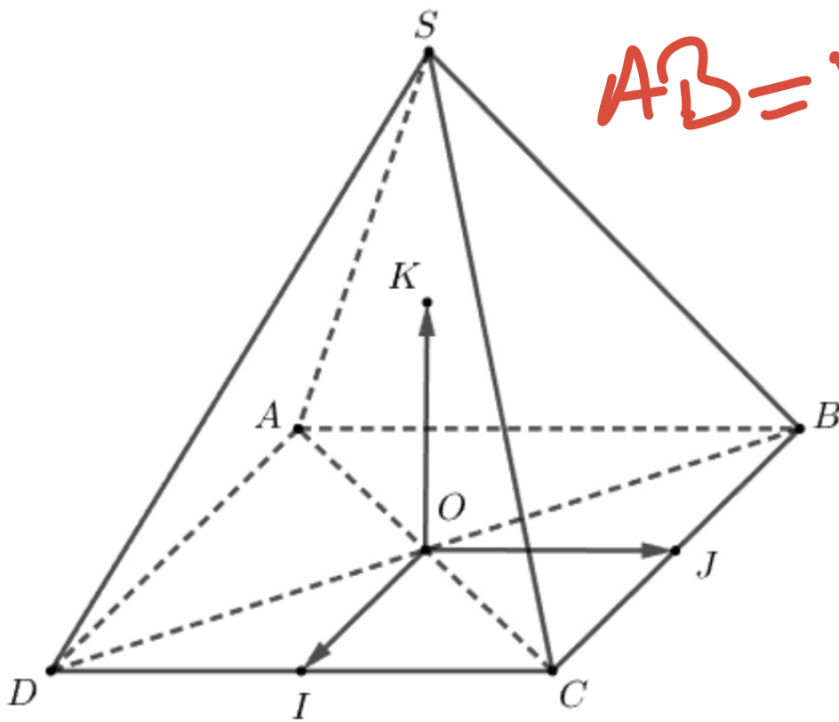
$$3) \lim_{t \rightarrow +\infty} 2e^{-t} + 2 = 2$$

$$\text{car } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$$

donc il n'y a pas d'élimination.

### Exercice 3

Dans cet exercice l'unité est le cm. On considère une pyramide à base carrée  $SABCD$  comme dans la figure ci-dessous.



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Dans cette figure :  Calcul de probabilités

- $AB = BC = CD = DA = OS = 2$  cm
- $I$  est le milieu de  $[CD]$ ,  $J$  le milieu de  $[BC]$  et  $K$  le milieu de  $[OS]$ .

L'espace est muni du repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ .

On admet que  $B(-1; 1; 0)$ ,  $C(1; 1; 0)$ , et  $S(0; 0; 2)$ .

Les parties A et B sont indépendantes.

#### Partie A

1. Donner les coordonnées des points  $A$  et  $D$ .
2. Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}$ .
3. En déduire la mesure de l'angle  $\widehat{BSC}$  arrondie au dixième de degré près.

1)  $A(-1; -1; 0)$

$D(1; -1; 0)$

$$2) \vec{SC} (1; 1; -2)$$

$$\vec{SB} (-1; 1; -2)$$

$$\vec{SC} \cdot \vec{SB} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-2) \times (-2)$$

$$= -1 + 1 + 4$$

$$= 4$$

$$3) \underbrace{\vec{SC} \cdot \vec{SB}}_4 = \underbrace{SC} \times \underbrace{SB} \times \cos(\angle SCB)$$

$$SC = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{6}$$

$$SD = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{6}$$

done :

$$4 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos(\widehat{BSC})$$

$$\frac{4}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \cos(\widehat{BSC})$$

$$\frac{2}{3} = \cos(\widehat{BSC})$$

hence  $\widehat{BSC} = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

$$\approx 48,2^\circ.$$

## Partie B

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point  $O$  au plan  $(SBC)$ .

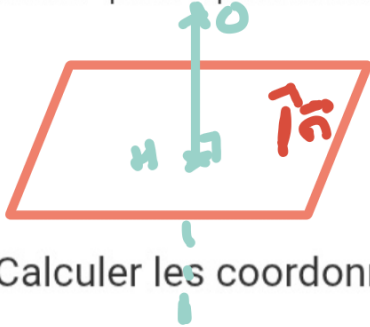
1. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

a. Justifier que le vecteur  $\vec{n}$  est normal au plan  $(SBC)$ .

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan  $(SBC)$  est  $2y + z - 2 = 0$ .

2. On note  $H$  le projeté orthogonal du point  $O$  sur le plan  $(SBC)$ .

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite  $(OH)$  est :



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

b. Calculer les coordonnées du point  $H$ .

c. En déduire que la distance du point  $O$  au plan  $(SBC)$  est égale à  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$  cm.

b)  $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  normal au plan  $(SBC)$   
alors :

$$0x + 2y + z + d = 0$$

$$2y + z + d = 0$$

$$S(0; 0; 2) \in (SBC)$$

donc :

$$2 \times 0 + 2 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -2$$

donc  $2y + z - 2 = 0$

2) a)  $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est directeur de  
(UH) et  $O(0; 0; 0) \in (UH)$

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \times t \\ y = 0 + 2 \times t \\ z = 0 + 1 \times t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b)  $2x^2 + 2t + t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4t + t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{5}$$

d'où

$$x = 0$$

$$y = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$z = \frac{2}{5}$$

done  $H(0; \frac{4}{5}; \frac{2}{5})$

5)  $OH = \sqrt{(0-0)^2 + (\frac{4}{5}-0)^2 + (\frac{2}{5}-0)^2}$

$$= \sqrt{0 + \frac{16}{25} + \frac{4}{25}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$