

5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.

On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z .

b. Un responsable affirme que si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50% de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.
Justifier cette affirmation.

$$\hookrightarrow \mathbb{P}(6 < Z < 12)$$

$$= \mathbb{P}(6 - 9 < Z - 9 < 12 - 9)$$

$$= \mathbb{P}(-3 < Z - 9 < 3)$$

$$= \mathbb{P}(|Z - 9| < 3)$$

$$= 1 - \boxed{\mathbb{P}(|Z - 9| \geq 3)}$$

or d'après l'inégalité de B-T :

$$\mathbb{P}(|Z - 9| \geq 3) \leq \frac{V(Z)}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$\text{d'où } -\mathbb{P}(|Z - 9| \geq 3) \geq -\frac{4}{9}$$

$$1 - P(|z - 0| > 3) > 1 - \frac{4}{9} \\ > \frac{5}{9} = 0.56$$

donc $P(6 < \bar{z} < 12) > 0.56 > 0.5$
 et l'affirmation vraie.

2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.

On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$.

On admet que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,09.

a. Calculer l'espérance $E(F_n)$ et exprimer la variance $V(F_n)$ en fonction de n .

b. Démontrer que $P(0,04 < F_n < 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$.

c. Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables. Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre ? Justifier la réponse.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad E[F_n] &= \frac{1}{n} E[X_n] \\ &= \frac{1}{n} \times n \times 0,09 \\ &= 0,09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(F_n) &= \frac{1}{n^2} \times V(X_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \times \cancel{n} \times 0,09 \times (1 - 0,09) \\ &= \frac{0,0819}{n} \end{aligned}$$

$$E[ax + b] = aE[X] + b$$

$$V(ax + b) = a^2 V(X)$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Si X et Y sont indépendantes
alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

$$b) \mathbb{P}(0,04 < F_n < 0,14)$$

$$= \mathbb{P}(0,04 - 0,09 < F_n - 0,09 < 0,14 - 0,09)$$

$$= \mathbb{P}(-0,05 < F_n - 0,09 < 0,05)$$

$$= \mathbb{P}(|F_n - 0,09| < 0,05)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|F_n - 0.09| \geq 0.05)$$

or d'après l'inégalité de
B-T :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|F_n - 0.09| \geq 0.05) &\leq \frac{V(F_n)}{0.05^2} \\ &= \frac{0.0816}{n \times 0.0025} \end{aligned}$$

$$= \frac{32.76}{n}$$

$$\text{d'où } \mathbb{P}(|F_n - 0.09| \geq 0.05) \leq \frac{32.76}{n}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(|F_n - 0.09| \geq 0.05) \geq 1 - \frac{32.76}{n}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(0.04 < F_n < 0.14) \geq 1 - \frac{32.76}{n}$$

$$c) \widehat{P}(0,04 < F_{su} < 0,14) > 0,93$$

$$or \quad F_{su} = \frac{SS}{su} = 0,11$$

5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1]$.

a. Donner une interprétation géométrique de $\int_a^1 f(x) dx$.

b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 - \int_a^1 x \ln(x) dx$$

c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 + \frac{a^2}{2} \ln(a) + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$

d. Déterminer la limite de $\int_a^1 f(x) dx$ quand a tend vers 0.

b) $\int_a^1 f(x) dx$

$$= \int_a^1 x (\ln(x))^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} (\ln(x))^2 \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \times 2 \times \ln(x) \times \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \times (P_n(x))^2 \right]_a^1 - \int_a^1 x P_n(x) dx$$

$$\cancel{\frac{1}{2} \times (P_n(1))^2} - \frac{a^2}{2} (P_n(a))^2$$

$$= \frac{a^2}{2} (P_n(a))^2 - \int_a^1 x P_n(x) dx$$

(c)

$$\int_a^1 x P_n(x) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \times P_n(x) \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x}{2} \times \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{a^2}{2} P_n(a) - \int_a^1 \frac{x}{2} dx$$

$$= -\frac{a^2}{2} \ln(a) - \left[\frac{x^2}{4} \right]_a^1$$

$$= -\frac{a^2}{2} \ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 - \left(-\frac{a^2}{2} \ln(a) - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} \right)$$

$$= -\frac{a^2}{2} (\ln(a))^2 + \frac{a^2}{2} \ln(a) + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$$