

6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées $1, 2, 3, \dots, N$ où N est un entier naturel non nul.

On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, $\dots$, X_N pour la ville N .

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à 7,14 et la même variance égale à 6,63.

On considère la variable aléatoire $M_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$.

a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?

b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.

c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N .

Montrer que $V(M_N) = \frac{6,63}{N}$.

d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95$$

b)
$$E[M_N] = E\left[\frac{X_1 + \dots + X_N}{N}\right]$$

↓ linéarité

$$= \frac{1}{N} (E[X_1] + \dots + E[X_N])$$

↙ même espérance

$$= \frac{1}{N} \times N \times 7,14$$
$$= 7,14.$$

$$c) V(\bar{x}_N) = V\left(\frac{x_1 + \dots + x_N}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{N^2} V(x_1 + \dots + x_N)$$

$$V(ax+b) = a^2 V(x)$$

$x_1, \dots, x_N$
independent

$$= \frac{1}{N^2} (V(x_1) + \dots + V(x_N))$$

$$= \frac{1}{N^2} \times \cancel{N} \times 6,63$$

$$= \frac{6,63}{N}$$

$$d) \mathbb{P}(7 < \pi_N < 7,28)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(7 - 7,14 < \pi_N - 7,14 < 7,28 - 7,14)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(-0,14 < \pi_N - 7,14 < 0,14)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|\pi_N - 7,14| < 0,14)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(|\pi_N - 7,14| \geq 0,14)$$

or d'après l'inégalité de Bienyamé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|\pi_N - 7,14| \geq 0,14) \leq \frac{V(\pi_N)}{(0,14)^2}$$

$$\leq \frac{6,63}{n \times (0,14)^2}$$

$$\leq \frac{338,265}{n}$$

$$d'au \quad -P(|\pi_N - 7,14| > 0,15) > \frac{-338,265}{N}$$

et

$$= 1 - P(|\pi_N - 7,14| > 0,14) > 1 - \frac{338,265}{N}$$

or :

$$P(7 < \pi_N < 7,28) > 0,95$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(|\pi_N - 7,14| > 0,14) > 0,95$$

$$1 - \frac{338,265}{N} > 0,95$$

$$\Leftrightarrow -\frac{338,265}{N} > 0,95 - 1 = -0,05$$

$$\Leftrightarrow \frac{338,265}{N} < 0,05$$

$$\Leftrightarrow 338,265 \leq N \times 0,05$$

$$\Leftrightarrow \frac{338,265}{0,05} \leq N$$

$$\Leftrightarrow N \geq 6765,3$$

Ainsi

$$N = 6766$$

