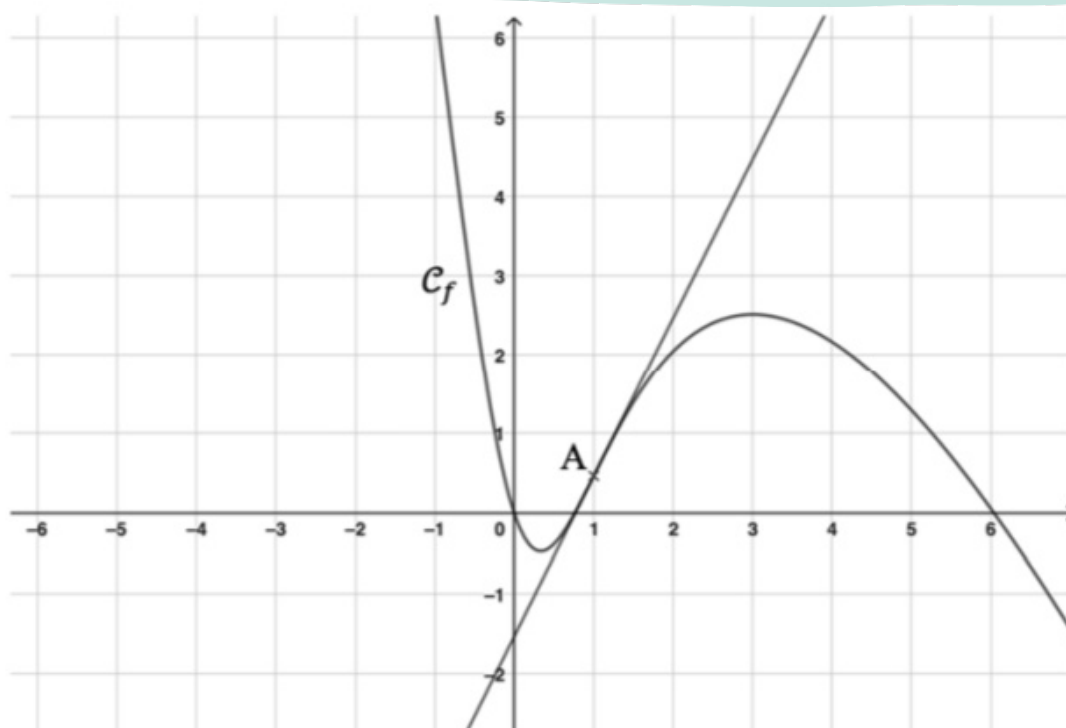


EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$ et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f , les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. a. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,
$$f(x) = x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$$
b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.
4. a. Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$.
b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x ,
$$f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}.$$
 - a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.
 - b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
 - c. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$.

1) f semble convexe sur $]-\infty; 1]$ car E_f est au-dessus de la tangente.

f semble concave sur $[1; +\infty[$ car E_f est au-dessous de la tangente.

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1 = +\infty$

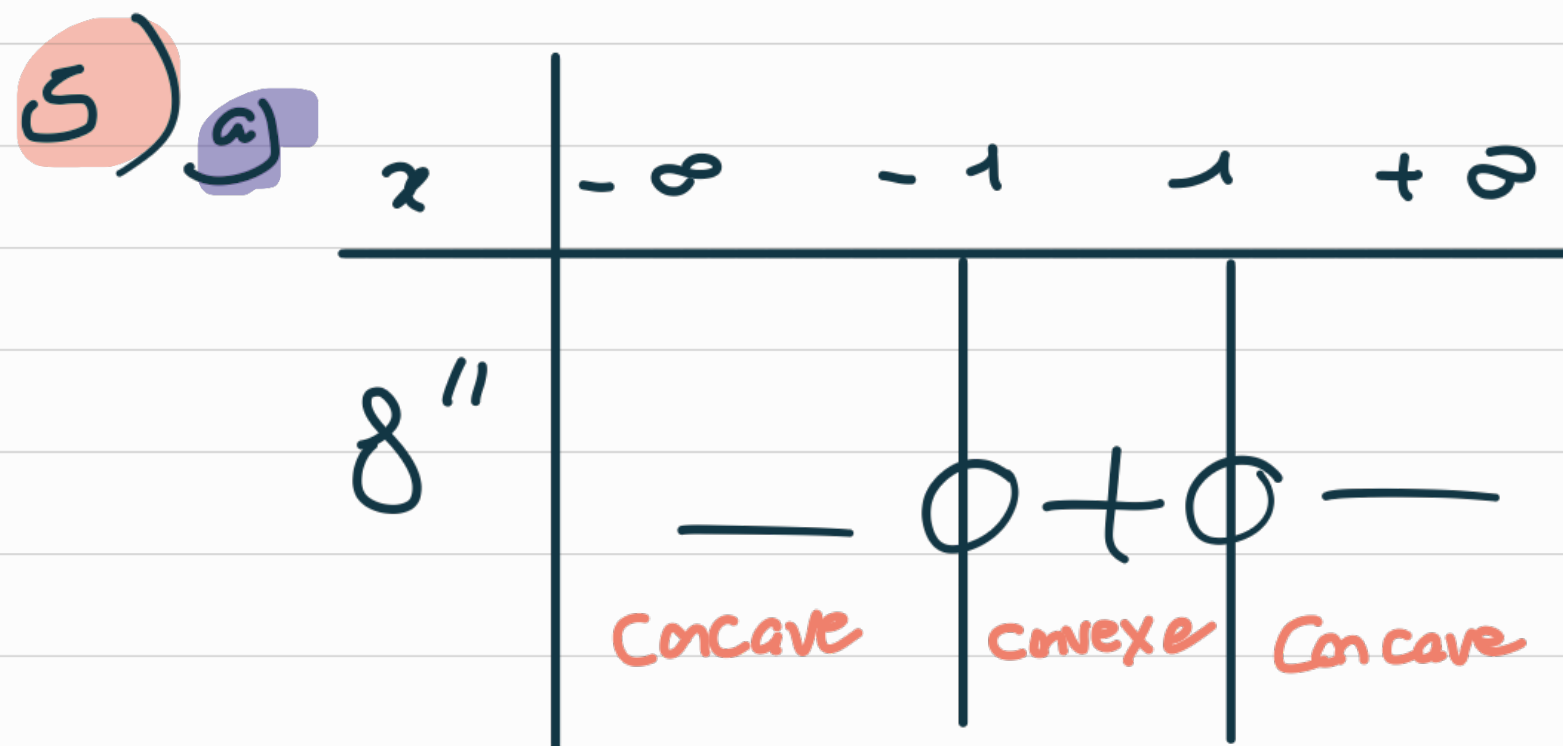
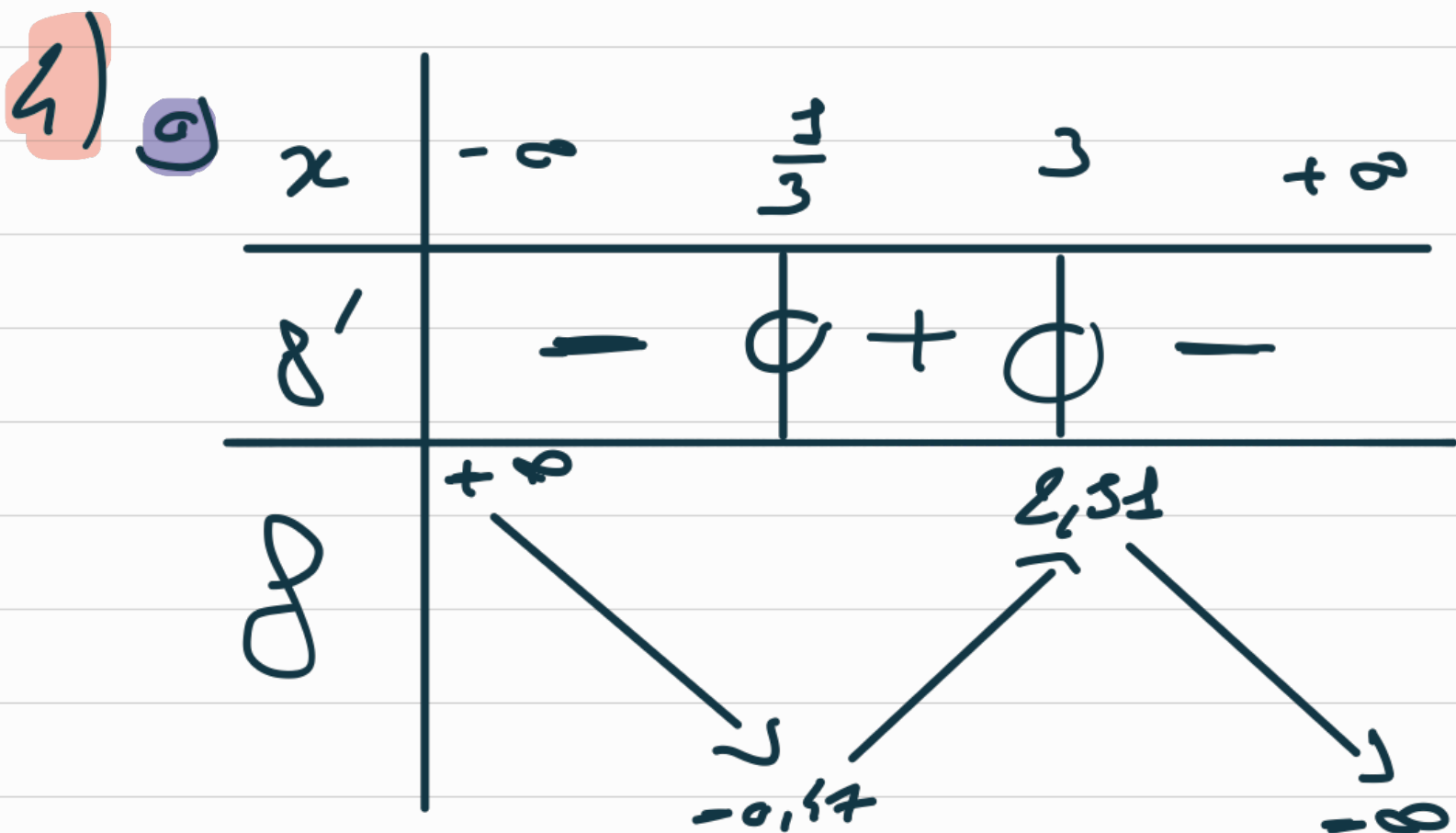
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

donc par composition on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x^2 + 1) = +\infty$.

De plus, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = +\infty$

Donc par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



donc on rejette.

$$b) y = 2x - 5 + 5\ln(2)$$

c) $\forall x > 1$, f est concave.

donc :

$$f(x) \leq 2x - 5 + 5\ln(2)$$

$$5\ln(x^2 + 1) - 3x \leq 2x - 5 + 5\ln(2)$$

$$5\ln(x^2 + 1) \leq 2x - 5 + 5\ln(2) + 3x$$

$$\cancel{5\ln}(x^2 + 1) \leq \cancel{5x} - \cancel{5} + \cancel{5\ln}(2)$$

$$\ln(x^2 + 1) \leq x - 1 + \ln(2)$$