

Exercice 1 (X points)

En 2020, une ville comptait 10 000 habitants.

On modélise l'évolution du nombre d'habitants de cette ville par la suite (u_n) définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,08u_n - 300, & n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 10\,000 \end{cases};$$

où u_n représente le nombre d'habitants pour l'année 2020+n.

1. Indiquer ce que représente u_1 et calculer sa valeur.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3750$.
 - a. Déterminer v_0 .
 - b. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a $v_{n+1} = 1,08v_n$.
 - c. En déduire la nature de la suite (v_n) .
 - d. Pour tout entier naturel n , exprimer, v_n en fonction de n .
 - e. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_n = 6250 \times 1,08^n + 3750$.

3. Le tableau ci-contre, extrait d'une feuille automatisée de calcul, a été obtenue par recopie vers le bas après avoir saisi la formule suivante dans la cellule B2 :

$$= 6250 * 1,08^{A2} + 3750$$

	A	B
1	n	Un
2	0	10000
3	1	10500
4	2	11040
5	3	11623,2
6	4	12253,056
7	5	12933,30048
8	6	13667,96452
9	7	14461,40168
10	8	15318,31381
11	9	16243,77892
12	10	17243,28123
13	11	18322,74373
14	12	19488,56323
15	13	20747,64829
16	14	22107,46015
17	15	23576,05696
18	16	25162,14152
19	17	26875,11284
20	18	28725,12187
21	19	30723,13162

La municipalité envisage d'ouvrir une nouvelle école maternelle dès que la population atteindra 19 000 habitants.

La construction d'un tel établissement nécessitant deux ans, déterminer l'année à partir de laquelle la construction de l'école doit commencer.

Aide au calcul :

$$10\,000 - 3\,750 = 6\,250 ;$$

$$1,08 \times 4\,050 = 4\,374 ;$$

$$\frac{4\,050}{1,08} = 3\,750 ;$$

$$3\,750 \times 1,08 = 4\,050.$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad b) \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 3750 \\
 &= 1,08u_n - 300 - 3750 \\
 &= 1,08u_n - 4050 \\
 &= 1,08\left(u_n - \frac{4050}{1,08}\right) \\
 &= 1,08(u_n - 3750) \\
 &= 1,08 v_n
 \end{aligned}$$

c) donc (v_n) est géométrique
de raison $q = 1,08$.

$$d) \quad v_n = v_0 \times q^n = 6250 \times (1,08)^n$$

e) $v_n = u_n - 3750$

donc $v_n + 3750 = u_n$

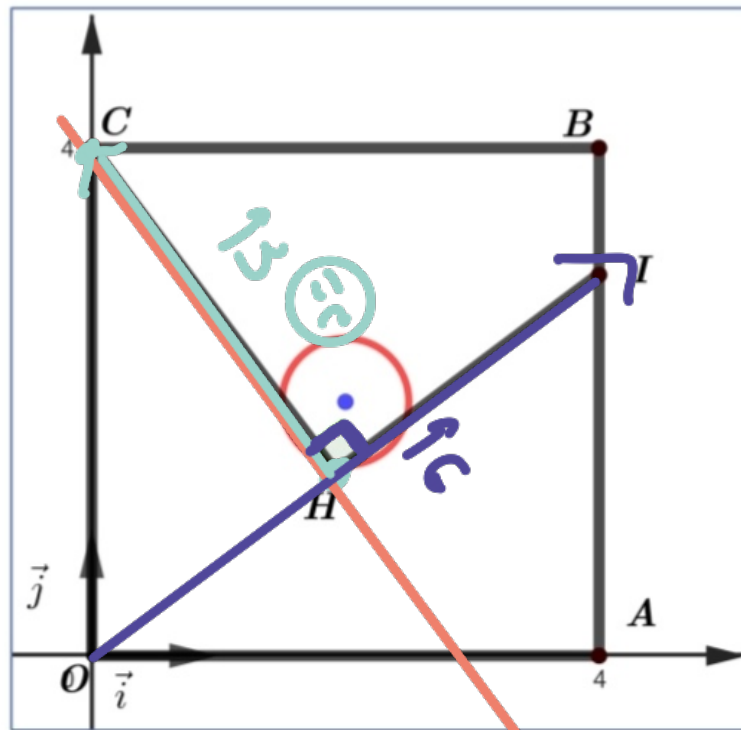
et $u_n = 6250 \times (1,08)^n + 3750$

3) On peut dire sur la feuille de calcul que $u_{12} = 19488,5623$.

Ainsi la construction de l'échelle doit commencer en $2020 + 10 = 2030$.

Exercice 1 (X points)

On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



On dispose des données suivantes :

- Le quadrilatère $OABC$ est un carré de côté 4 ;
- On a $A(4; 0), B(4; 4), C(0; 4), I(4; 3)$;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI) ;
- On note $\mathcal{E}$ le cercle de centre $D(2; 2)$ et de rayon 0,5.

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OC}$. $\vec{OI}(4;3)$ $\vec{OC}(0;4)$

b. En déduire le produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OC} = 4 \times 0 + 3 \times 4 = 12$

2. a. Exprimer le produit scalaire $\vec{OI} \cdot \vec{OC}$ en fonction des longueurs OH et OI .

b. Calculer la longueur OI .

c. En déduire que $OH = 2,4$.

3. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CH) .

b. Justifier qu'une équation du cercle $\mathcal{E}$ est :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0.$$

c. Le point $M(1,5; 2)$ appartient-il à l'intersection du cercle $\mathcal{E}$ et de la droite (CH) ? Justifier.

Aide au calcul.

$$0,5^2 = 0,25$$

$$1,5^2 = 2,25$$

$$2,5^2 = 6,25$$

$$5 \times 2,4 = 12$$

2) a) Comme H est la
projeté orthogonal du point C
sur la droite (OI), alors

$$\vec{OI} \cdot \vec{OC} = \vec{OI} \cdot \vec{OH}$$
$$= OI \times OH$$

b)

$$OI = \sqrt{(x_I - x_0)^2 + (y_I - y_0)^2}$$
$$= \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{16+9}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5$$

$$c) \vec{OI} \cdot \vec{OC} = OI \times OH$$

$$12 = 5 \times OH$$

$$\text{donc } OH = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$3) a) \vec{OI} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ normal } \bar{a} (CH)$$

$$\text{donc } (CH): 4x + 3y + c = 0$$

$$\text{or } C(0;4) \in (CH)$$

$$\text{d'où } 4 \times 0 + 3 \times 4 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow 12 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -12$$

$$\text{donc } (CH): 4x + 3y - 12 = 0$$

b) $(\mathcal{E}) : \begin{cases} \text{centre } D(2;2) \\ \text{rayon } 0,5 \end{cases}$

$$(\mathcal{E}) : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 0,5^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 + y^2 - 2 \times y \times 2 + 2^2 = 0,25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 0,25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 4y + 8 = 0,25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 - 0,25 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0$$

$$\odot \quad \pi(1,5; 2)$$

$$\bullet \quad 1,5^2 + 2^2 - 4 \times 1,5 - 4 \times 2 + 7,75$$

$$= \dots = 0$$

$$\text{done} \quad \pi \in (\varepsilon)$$

$$\bullet \quad 4 \times 1,5 + 3 \times 2 - 12$$

$$= 6 + 6 - 12$$

$$= 12 - 12$$

$$= 0$$

$$\text{done} \quad \pi \in (CH).$$