

DEUXIÈME PARTIE (14 POINTS)

Exercice 1 (5 points)

Un maire souhaite végétaliser sa ville. Pour cela, il décide de planter des mûriers platanes dans les différents parcs.

Ces arbres sont réputés pour leurs qualités d'ombrage et de résistance à la sécheresse.

Partie A

Au moment de la plantation, un mûrier platane mesure 1 mètre.

On suppose que chaque année la hauteur de l'arbre augmente de 40 cm.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la hauteur de l'arbre, en mètres, n années après sa plantation. Ainsi $u_0 = 1$.

- 1) a. Calculer u_1 . $u_1 = 1 + 0,4 = 1,4$
b. Quelle sera la hauteur de l'arbre deux années après sa plantation ? $u_2 = 1,8$
- 2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier. $u_{n+1} = u_n + 0,4 \Rightarrow$ arithmétique
raison 0,4.
- 3) Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
- 4) Au bout de combien d'années le mûrier atteindra-t-il 9 mètres de haut ?

$$\begin{aligned} 3) \quad u_n &= u_0 + n \times r \\ &= 1 + 0,4n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad u_n &= 9 \\ 1 + 0,4n &= 9 \end{aligned}$$

$$0,4n = 9 - 1 = 8$$

$$n = \frac{8}{0,4} = \frac{8}{\frac{4}{10}}$$

$$= 8 \times \frac{10}{4}$$

$$= 2 \times 10$$

$$= 20$$

Au bout de 20 années.

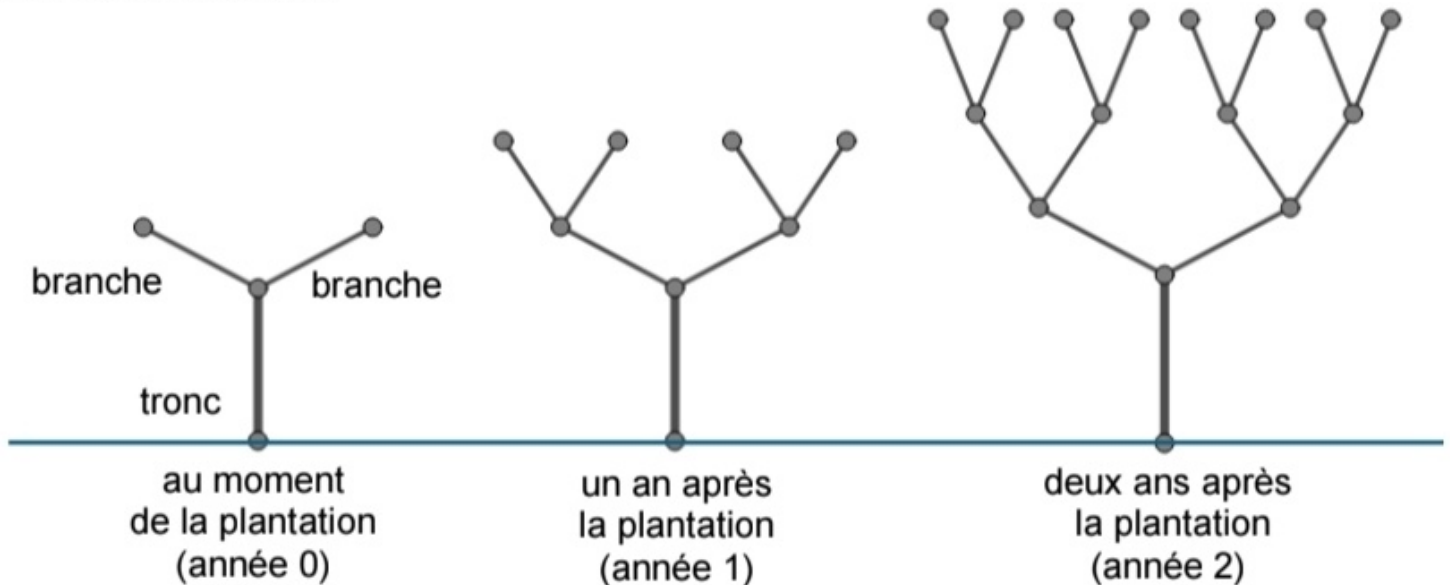
Partie B

Au moment de la plantation, l'arbre possède un tronc et deux branches.

Un an après la plantation, on observe 4 nouvelles branches.

Deux ans après la plantation, on observe 8 nouvelles branches.

Chaque année, le nombre de nouvelles branches double comme représenté sur le schéma ci-dessous :



Pour tout entier naturel n , on note v_n le nombre de nouvelles branches n années après la plantation. À la plantation, l'arbre possède 2 branches, ainsi on pose $v_0 = 2$.

- 1) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier. $v_{n+1} = 2 \times v_n \Rightarrow$ *géo. raison 2.*
- 2) a. Un an après la plantation, l'arbre a produit 4 nouvelles branches. Il possède alors un nombre total de branches égal à 6.

Montrer que, trois ans après sa plantation, l'arbre possède un nombre total de branches égal à 30.

- b. On donne le programme ci-contre écrit en langage Python :

Rappel : for i in range(n) permet de répéter n fois un ensemble d'instructions.

```
v = 2
total = 2
for i in range(10):
    v = 2 * v
    total = total + v
print(total)
```

La valeur affichée par ce programme est 4 094.

Dans le contexte de l'exercice, que représente la valeur 4 094 affichée par ce programme ?

$$\begin{aligned}
 2) a) S &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 \\
 &= 2 + 4 + 8 + 16 \\
 &= 30
 \end{aligned}$$

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$v_3 = 2 \times 2^3 = 2 \times 8 = 16$$

$$b) \text{print}(\text{total}) = v_0 + \dots + v_9$$

Au nombre total de branche au bout de 9 années.

Exercice 2 (3 points)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(-1; 5)$, $B(3; 5)$ et $C(4; 0)$.

- 1) a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 2) a. Montrer que $AC = 5\sqrt{2}$.

On admet que $AB = 4$.

- b. Écrire l'expression permettant de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de l'angle $\widehat{BAC}$.
- c. En déduire une mesure, en radian, de l'angle $\widehat{BAC}$.

Aide aux calculs :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1) a) $\overrightarrow{AB}(4; 0)$
 $\overrightarrow{AC}(5; -5)$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

2) a) $AC = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (-5)^2}$
 $= \sqrt{50}$

$$= \frac{5 \times 2}{\sqrt{2}}$$

$$= 5\sqrt{2}$$

$$b) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$c) 20 = 4 \times 5\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$20 = 20\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\frac{\cancel{20}}{\cancel{20\sqrt{2}}} = \cos(\widehat{BAC})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\widehat{BAC})$$

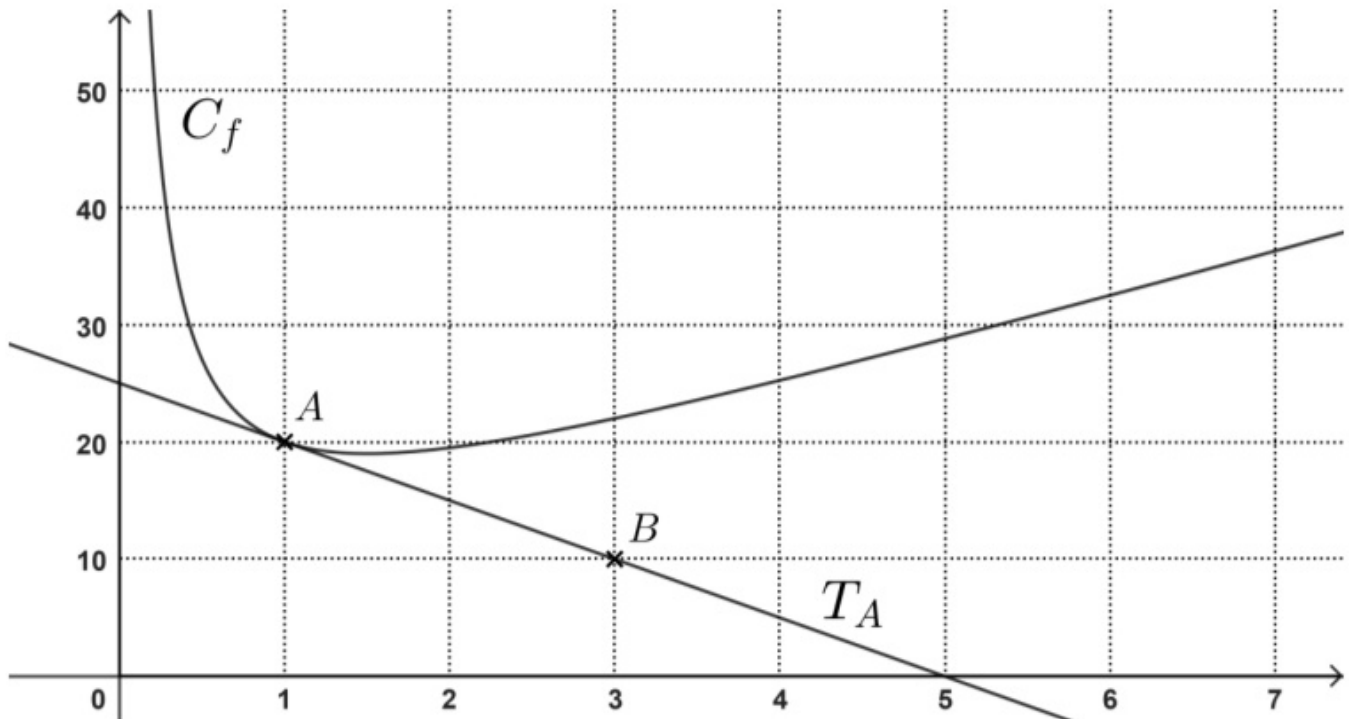
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\widehat{BAC}) \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 3 (6 points)

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$.

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe C_f représentative de la fonction f et la droite T_A tangente à la courbe C_f au point A de coordonnées $(1; 20)$.

La droite T_A passe par le point B de coordonnées $(3; 10)$.



- 1) a. Donner $f(1) = 20$
b. Déterminer la valeur de $f'(1) = -5$
c. Justifier que l'équation réduite de la tangente T_A à C_f au point A est :
$$y = -5x + 25.$$

Pour la suite de l'exercice, la fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x^2 + 7x + 9}{x}$.
On admet que f est dérivable sur cet intervalle.

- 2) a. Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
c. En déduire les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

- 3) Existe-t-il une tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 5$?
Justifier votre réponse.

a) b) $f'(1) = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A}$

$$= \frac{10 - 20}{3 - 1}$$

$$= \frac{-10}{2}$$

$$= -5$$

c)

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$g = -5x + 25$$

2) a)
$$f'(x) = \frac{(8x+7)x - (4x^2+7x+9)}{x^2}$$

$$= \frac{8x^2 + 7x - 4x^2 - 7x - 9}{x^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 9}{x^2}$$

$a^2 - b^2$
 $= (a-b)(a+b)$

$$= \frac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}$$

b) sur $]0; +\infty[$, $2x+3 > 0$
 et $x^2 > 0$

donc f' est du signe de
 $2x-3$

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
δ'	-	0	+

c) donc f est décroissante sur $]0; \frac{3}{2}]$ et croissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$.

3) tangente est parallèle à $y = ax + b$ si

$$f'(x) = a$$

$$\cdot f'(x) = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)(2x+3)}{x^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(2x+3) = 3x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 9 = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 9 - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \quad (\Rightarrow) \quad x = \sqrt{9} = 3$$

donc où il existe une
tangente parallèle à $y = 3x + 5$.

Tangente au point d'abscisse 3.