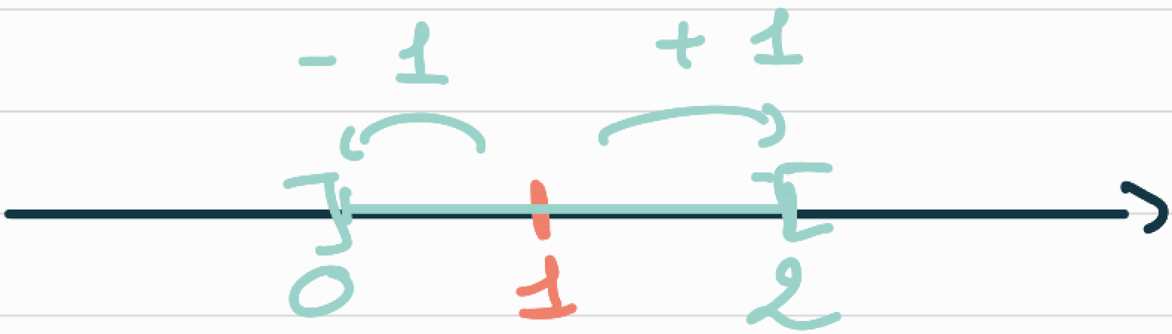
Feuille 3

exercice 3 :

a) $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}$

$|x-1| < 1$

$\iff 0 < x < 2$



• A ouvert alors $A = \mathring{A}$

• on pose $B = \overset{x}{[0;2]} \times \overset{y}{\mathbb{R}}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\}$

$\rightarrow$ $\mathcal{B}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue

$\hookrightarrow$ $\mathcal{B} = \varphi^{-1}([0;2])$

avec $\varphi : (x,y) \longmapsto x$

De plus, $A \subset \mathcal{B}$, donc on a :

$$\bar{A} \subset \mathcal{B}.$$

$\rightarrow$ Soit $(x,y) \in \mathcal{B}$.

on pose $(x_n, y_n) = \left(\left|x - \frac{1}{n}\right| ; y\right)$

• est-ce que $0 < x_n < 2$?

$\hookrightarrow$ $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 < \left|x - \frac{1}{n}\right| < 2$

- $(x_n, y_n) \in A$
- $(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x, y)$

donc $(x,y) \in \overline{A}$

Donc $B = \overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\}$

- $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{(0;y) : y \in \mathbb{R}\}$
$\cup \{(2;y) : y \in \mathbb{R}\}$

Feuille 4

exercice 2 :

a) $g(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$= \frac{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}{r\cos\theta - r\sin\theta}$$

$$= \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r(\cos\theta - \sin\theta)}$$

$$= \frac{r^2}{r(\cos\theta - \sin\theta)} = \frac{r}{\cos\theta - \sin\theta)} \neq 0$$ cte

$$\xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

b. $f(x,0) = \frac{x^2}{x} = x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

. $f(x, x+x^2)$

$$= \frac{x^2 + (x+x^2)^2}{x - (x+x^2)}$$

$$= \frac{x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4}{-x^2}$$

$$= \frac{\cancel{x^2}(2 + 2x + x^2)}{-\cancel{x^2}}$$

$$= -(2 + 2x + x^2) \xrightarrow[x \to 0]{} -2$$

homéomorphisme :

- f continue
- f admet une inverse f^{-1}
- f^{-1} continue.

exercice 4 :

a) • on vérifie $f(x) \in B_2(0,1)$

$$\|f(x)\|_2 = \frac{\|x\|_2}{1+\|x\|_2}$$

$$= \frac{\|\cancel{x}\|_2}{\|\cancel{x}\|_2\left(\frac{1}{\|x\|_2}+1\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{\|x\|_2}} < 1$$

> 1

donc $g \in B_2(0,1)$.

. $x \longmapsto \|x\|_2$ est continue
et $x \longmapsto x$ continue.

De plus, $1 + \|x\|_2 \neq 0$.

Donc g est continue comme
quotient d'applications continues
dont le dénominateur ne s'annule
pas.