DEUXIÈME PARTIE (14 POINTS)

Exercice 1 (5 points)

Un maire souhaite végétaliser sa ville. Pour cela, il décide de planter des mûriers platanes dans les différents parcs.
Ces arbres sont réputés pour leurs qualités d'ombrage et de résistance à la sécheresse.

Partie A

Au moment de la plantation, un mûrier platane mesure 1 mètre.
On suppose que chaque année la hauteur de l'arbre augmente de 40 cm.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la hauteur de l'arbre, en mètres, n années après sa plantation. Ainsi $u_0 = 1$.

1) **a.** Calculer u_1.
b. Quelle sera la hauteur de l'arbre deux années après sa plantation ?
2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
3) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4) Au bout de combien d'années le mûrier atteindra-t-il 9 mètres de haut ?

1) a) $u_1 = 1 + 0,4 = 1,4$

b) $u_2 = 1,4 + 0,4 = 1,8.$

donc ....

2) $u_{n+1} = u_n + 0,4$

donc (u_n) est arithmétique de raison $0{,}4$.

3) $u_n = u_0 + n \times r$

$= 1 + 0{,}4n$

4) $u_n = 9$

$\Leftrightarrow 1 + 0{,}4n = 9$

$\Leftrightarrow 0{,}4n = 9 - 1 = 8$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{8}{0{,}4} = 20$

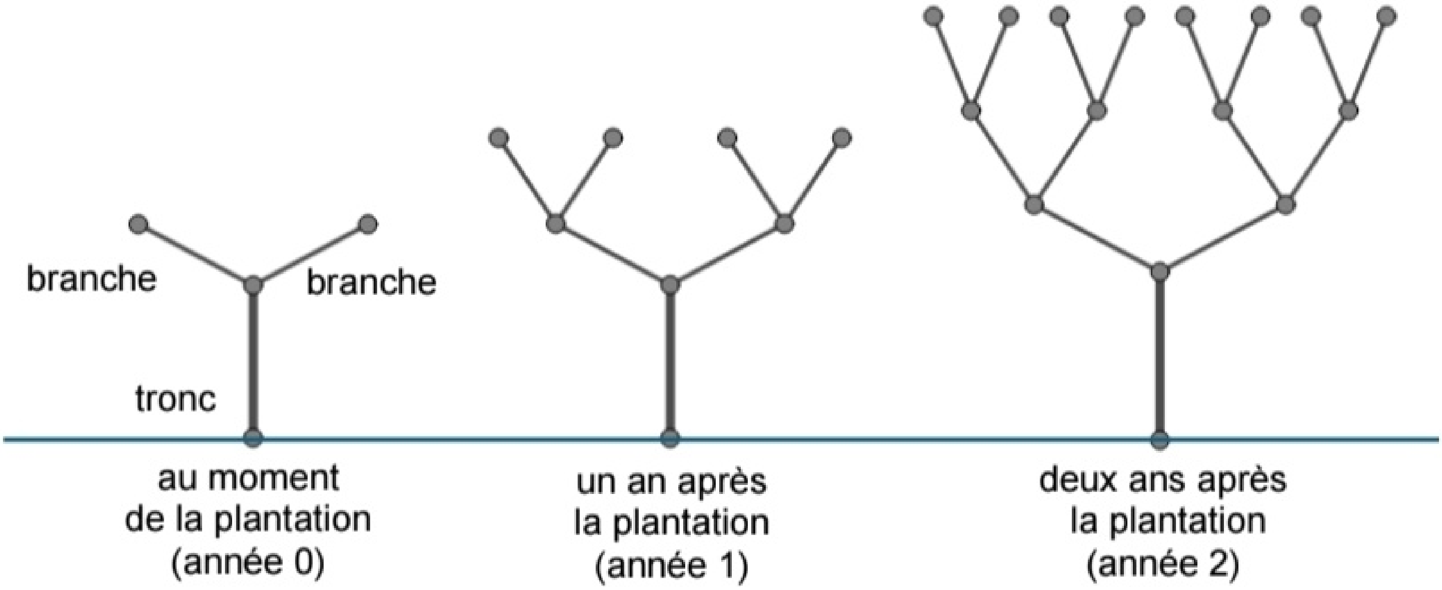
Rq : $u_{10} = 1 + 0{,}4 \times 10 = 5$

$u_{20} = 1 + 0{,}4 \times 20 = 1 + 8 = 9$.

Partie B

Au moment de la plantation, l'arbre possède un tronc et deux branches.
Un an après la plantation, on observe 4 nouvelles branches.
Deux ans après la plantation, on observe 8 nouvelles branches.

Chaque année, le nombre de nouvelles branches double comme représenté sur le schéma ci-dessous :



Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre de nouvelles branches n années après la plantation. À la plantation, l'arbre possède 2 branches, ainsi on pose $v_0 = 2$.

1) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier.

2) **a.** Un an après la plantation, l'arbre a produit 4 nouvelles branches. Il possède alors un nombre total de branches égal à 6.

Montrer que, trois ans après sa plantation, l'arbre possède un nombre total de branches égal à 30.

b. On donne le programme ci-contre écrit en langage Python :

Rappel : `for i in range(n)` *permet de répéter* `n` *fois un ensemble d'instructions.*

```
v = 2
total = 2
for i in range(10):
    v = 2 * v
    total = total + v
print(total)
```

La valeur affichée par ce programme est 4 094.
Dans le contexte de l'exercice, que représente la valeur 4 094 affichée par ce programme ?

1) $v_{n+1} = 2 \times v_n$

donc (v_n) est géométrique
de raison n.

2) a) $S = v_0 + v_1 + v_2 + v_3$

$= 2 + 4 + 8 + 16$

$= 30$

$v_3 = v_0 \times q^3 = 2 \times 2^3 = 2 \times 8 = 16$

b) print (total) $= v_0 + v_1 + \dots + v_9$

. 4 094 représente le nombre
de branches totale au bout de
9 années.

Exercice 2 (3 points)

$\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(-1;5)$, $B(3;5)$ et $C(4;0)$.

1) **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) **a.** Montrer que $AC = 5\sqrt{2}$.

On admet que $AB = 4$.

b. Écrire l'expression permettant de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de l'angle $\widehat{BAC}$.

c. En déduire une mesure, en radian, de l'angle $\widehat{BAC}$.

<u>Aide aux calculs</u> :

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

1) a) $\vec{AB}(4;0)$

$\vec{AC}(5;-5)$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 5 + 0 \times (-5)$

$= 20$

2) a) $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$= \sqrt{(4 - (-1))^2 + (0 - 5)^2}$

$= \sqrt{5^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{25 + 25}$

$= \sqrt{50}$

$= \frac{5 \times 2}{\sqrt{2}}$

$= 5\sqrt{2}$

b) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

c) $20 = 4 \times 5\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$

$$\frac{20}{4 \times 5\sqrt{2}} = \cos(\widehat{BAC})$$

$$\frac{2\cancel{0}}{2\cancel{0}\sqrt{2}} = \cos(\widehat{BAC})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\widehat{BAC})$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

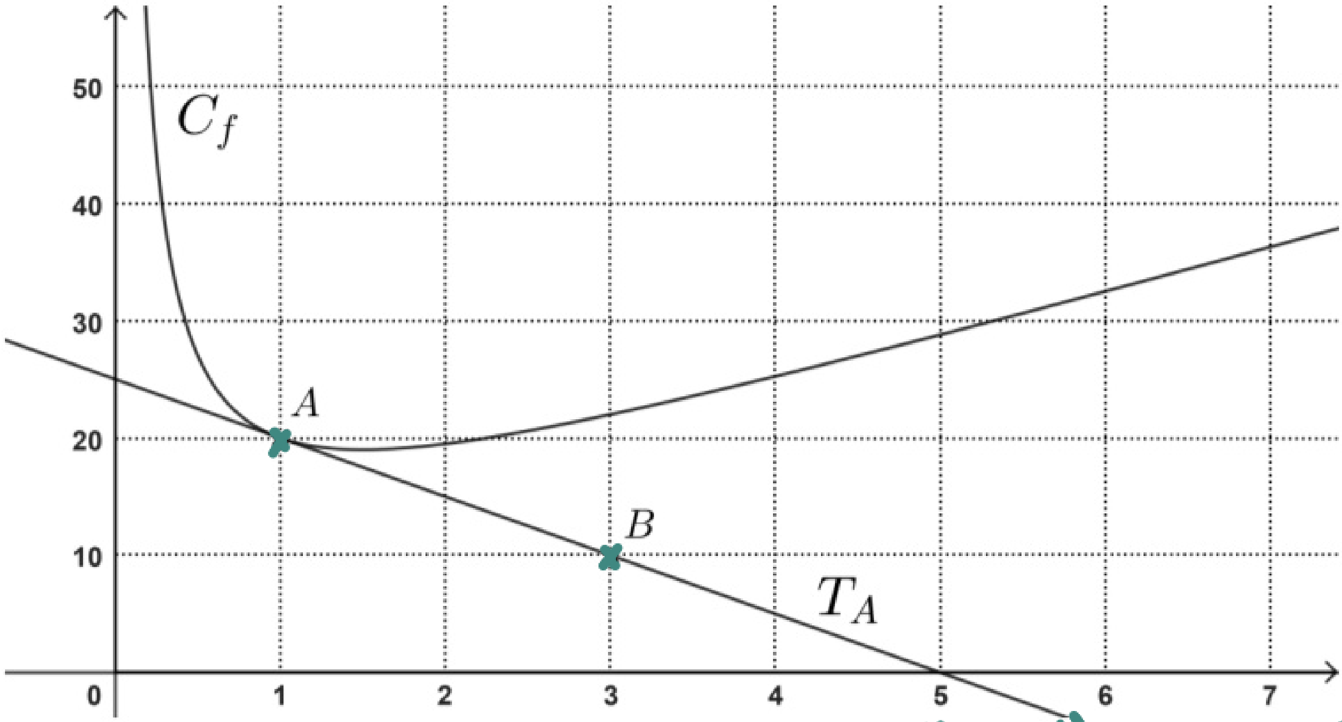
donc $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 3 **(6 points)**

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$.

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe C_f représentative de la fonction f et la droite T_A tangente à la courbe C_f au point A de coordonnées $(1\,;20)$.

La droite T_A passe par le point B de coordonnées $(3\,;10)$.



$f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{10-20}{3-1} = -5$

1) a. Donner $f(1)$. $= 20$

b. Déterminer la valeur de $f'(1)$.

c. Justifier que l'équation réduite de la tangente T_A à C_f au point A est :

$$y = -5x + 25.$$

Pour la suite de l'exercice, la fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x^2+7x+9}{x}$. $\dfrac{u}{v}$

On admet que f est dérivable sur cet intervalle.

2) a. Démontrer que pour tout $x \in\,]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

c. En déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

3) Existe-t-il une tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 5$? Justifier votre réponse.

. $f'(a) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

↳ lecture graphique avec A et B deux points de la tangente.

. $T_a f : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

1) c) $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$= -5(x-1) + 20$

$= -5x + 5 + 20$

$= -5x + 25.$

2) a) $f'(x) = \dfrac{(8x+7)x - (4x^2+7x+9)\times 1}{x^2}$

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(e^{ax+b}\right)' = a e^{ax+b}$$

$$f'(x) = \frac{8x^2 + \cancel{7x} - 4x^2 - \cancel{7x} - 9}{x^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 9}{x^2}$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= \frac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}$$

$a=2 \quad b=-3\,?$

b) $$f'(x) = \frac{(2x-3)\overbrace{(2x+3)}^{>0}}{x^2}$$

$x^2 > 0$

x	0		$\frac{3}{2}$ $\quad -\frac{3}{a}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

c) Donc f est décroissante sur $]0; \frac{3}{2}]$ et f est croissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$.

$$ax + b$$

$a > 0$

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
signe		$-$	0	$+$	

$a < 0$

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
signe		$+$	0	$-$	

$$ax^2 + bx + c$$

$\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe ax^2+bx+c		signe a	0	signe $-a$	0	signe a	

$\Delta = 0$:

$-b/2a$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe x^2+bx+c		signe a	0	signe a	

$\Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
signe x^2+bx+c		signe de a	