

DEUXIÈME PARTIE (14 POINTS)

Exercice 1 (5 points)

Un maire souhaite végétaliser sa ville. Pour cela, il décide de planter des mûriers platanes dans les différents parcs.

Ces arbres sont réputés pour leurs qualités d'ombrage et de résistance à la sécheresse.

Partie A

Au moment de la plantation, un mûrier platane mesure 1 mètre.

On suppose que chaque année la hauteur de l'arbre augmente de 40 cm.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la hauteur de l'arbre, en mètres, n années après sa plantation. Ainsi $u_0 = 1$.

- 1) a. Calculer u_1 .
b. Quelle sera la hauteur de l'arbre deux années après sa plantation ?
- 2) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
- 3) Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
- 4) Au bout de combien d'années le mûrier atteindra-t-il 9 mètres de haut ?

$$2) \quad u_{n+1} = u_n + 0,4, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

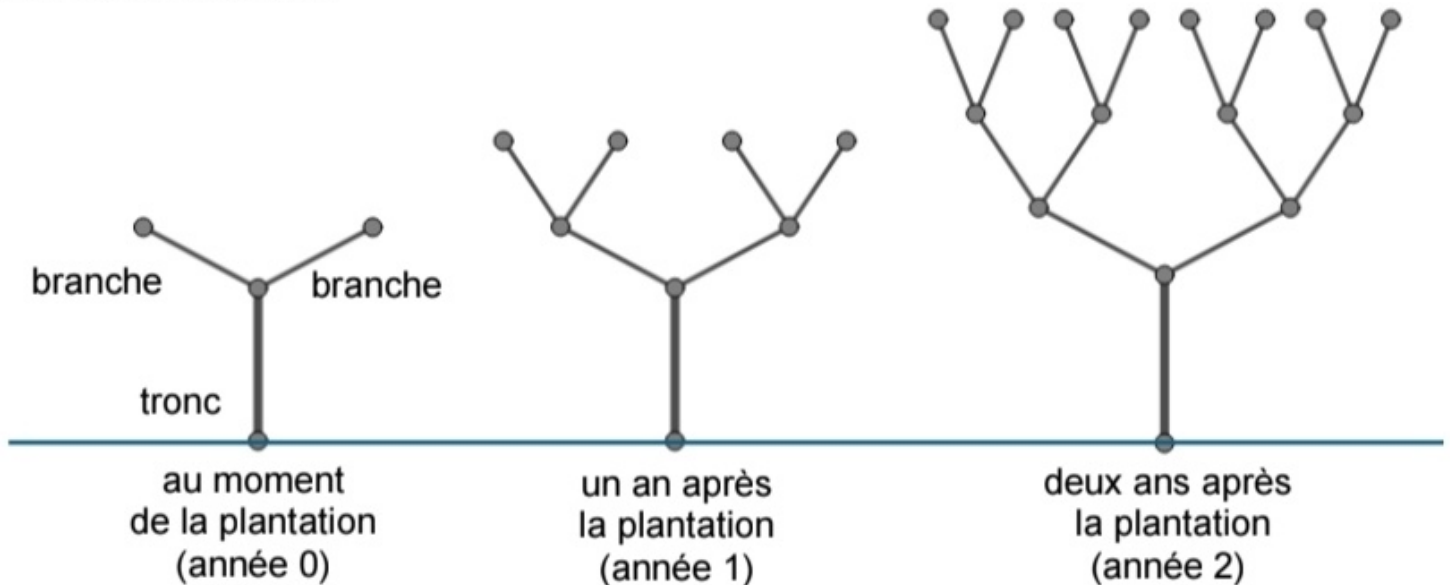
Partie B

Au moment de la plantation, l'arbre possède un tronc et deux branches.

Un an après la plantation, on observe 4 nouvelles branches.

Deux ans après la plantation, on observe 8 nouvelles branches.

Chaque année, le nombre de nouvelles branches double comme représenté sur le schéma ci-dessous :



Pour tout entier naturel n , on note v_n le nombre de nouvelles branches n années après la plantation. À la plantation, l'arbre possède 2 branches, ainsi on pose $v_0 = 2$.

1) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier. $v_{n+1} = 2v_n$

2) a. Un an après la plantation, l'arbre a produit 4 nouvelles branches. Il possède alors un nombre total de branches égal à 6. $v_3 = v_0 \times 2^3 = 2 \times 2^3$

Montrer que, trois ans après sa plantation, l'arbre possède un nombre total de branches égal à 30. $v_0 + v_1 + v_2 + v_3 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$

b. On donne le programme ci-contre écrit en langage Python :

```
v = 2
total = 2
for i in range(10):
    v = 2 * v
    total = total + v
print(total)
```

Rappel : `for i in range(n)` permet de répéter n fois un ensemble d'instructions.

La valeur affichée par ce programme est 4 094.

Dans le contexte de l'exercice, que représente la valeur 4 094 affichée par ce programme ? \Rightarrow nb total de branche au bout de 9 ans.

Exercice 2 (3 points)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(-1; 5)$, $B(3; 5)$ et $C(4; 0)$.

1) a. Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .

$$\vec{AB}(4; 0) \quad \vec{AC}(5; -5)$$

b. En déduire la valeur du produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 20$

2) a. Montrer que $AC = 5\sqrt{2}$.

On admet que $AB = 4$.

b. Écrire l'expression permettant de calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ en fonction de l'angle \widehat{BAC} .

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

c. En déduire une mesure, en radian, de l'angle \widehat{BAC} .

Aide aux calculs :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$20 = 4 \times 5\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\frac{20}{4 \times 5\sqrt{2}} = \cos(\widehat{BAC})$$

$$\frac{20}{20\sqrt{2}} = \cos(\widehat{BAC})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\widehat{BAC})$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\widehat{BAC})$$

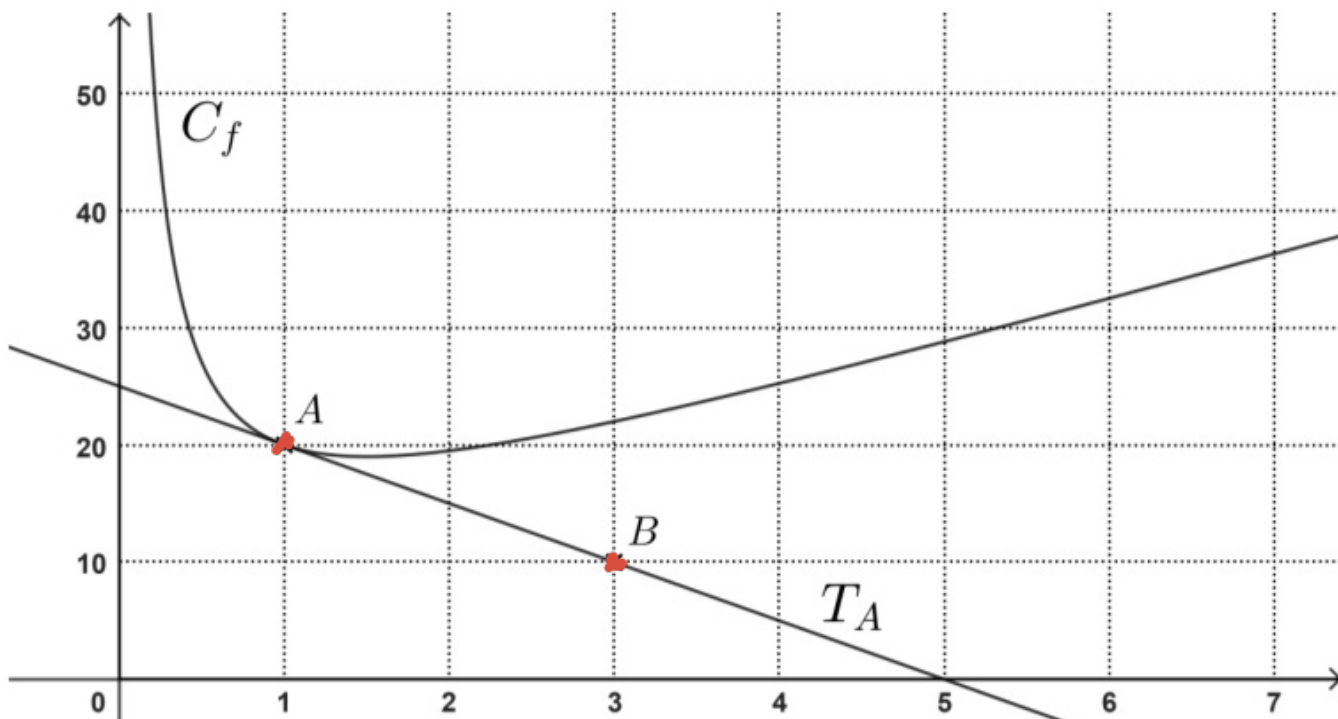
$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3 (6 points)

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$.

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe C_f représentative de la fonction f et la droite T_A tangente à la courbe C_f au point A de coordonnées $(1; 20)$.

La droite T_A passe par le point B de coordonnées $(3; 10)$.



- 1) a. Donner $f(1) = 20$
b. Déterminer la valeur de $f'(1) = -5$
c. Justifier que l'équation réduite de la tangente T_A à C_f au point A est :
$$y = -5x + 25.$$

Pour la suite de l'exercice, la fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x^2 + 7x + 9}{x}$.
On admet que f est dérivable sur cet intervalle.

- 2) a. Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
c. En déduire les variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- 3) Existe-t-il une tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 5$?
Justifier votre réponse.

$$f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

avec A et B deux points de la tangente.

$$f'(1) = \frac{10 - 20}{3 - 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$= -5(x-1) + 20$$

$$= -5x + 5 + 20$$

$$= -5x + 25$$

$$3) f'(x) = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3)(2x-3)}{x^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 9 - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{9} \quad \text{or} \quad -\sqrt{9}$$

$= 3$ $= 3$