Exercice 1 **5 points**

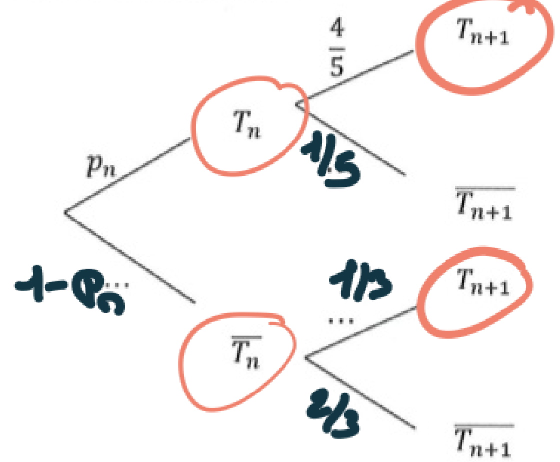
Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre.
On modélise la situation de la façon suivante :

- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
  - lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\frac{4}{5}$;
  - lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement T_n : « Le tireur atteint le centre de la cible au n-ième tir ».
On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'évènement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.

2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent :



D'après probas totales :

$p_{n+1} = \mathbb{P}(T_{n+1})$
$= p_n \times \frac{4}{5} + (1-p_n) \times \frac{1}{3}$
$= \frac{4}{5} p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} p_n$
$= \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}.$

3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}}$$ 2

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$u_n + \frac{5}{8} = p_n \Leftarrow$ $$u_n = p_n - \frac{5}{8}$$ 1

$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{8}$
$= \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{8}$
$= \frac{7}{15} p_n - \frac{7}{24}$
$= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{7/24}{7/15}\right)$
$= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{5}{8}\right)$
$= \frac{7}{15} u_n.$

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.

   b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n. $u_1 = p_1 - \frac{7}{15} = \frac{1}{2} - \frac{7}{15} = \frac{1}{30}$

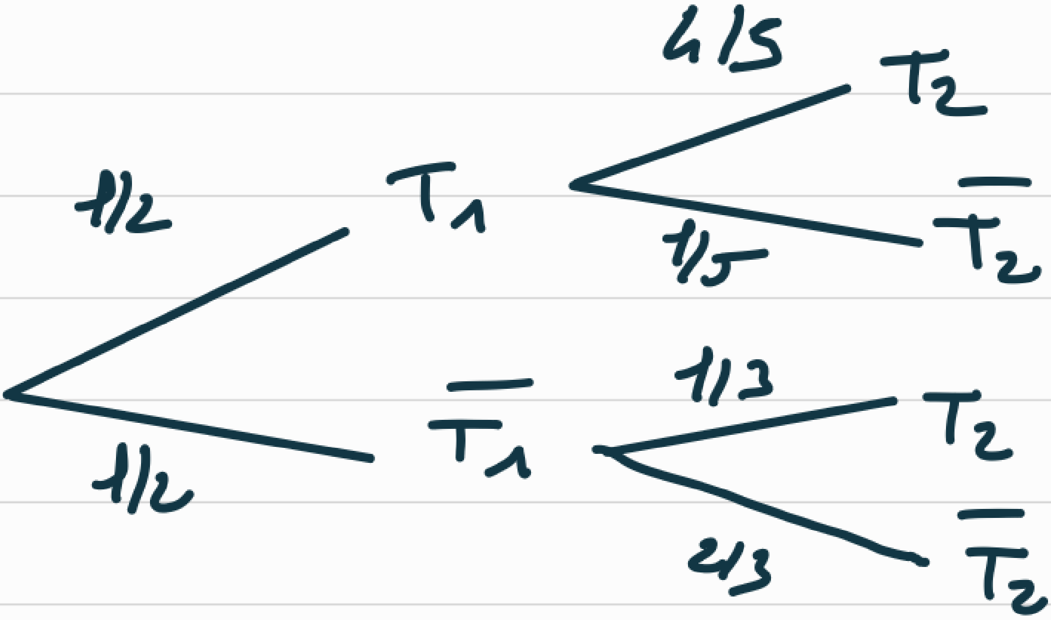
   $u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{30} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$

   c. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

   $p_n = \frac{1}{30} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}.$

5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

1) $P_1 = \frac{1}{2}$



D'aprés la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2) + \mathbb{P}(\overline{T_1} \cap T_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{17}{30}$$

donc $P_2 = \frac{17}{30}$.